Università degli Studi di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Anno Accademico 2003/2004
Tesi di Laurea in Fisica

Coomologia Equivariante degli Algebroidi di Lie e Teorie Super Yang-Mills

Paolo Rossi

Relatore : dott. Nicola Maggiore Correlatore : prof. Camillo Imbimbo

Relatore esterno : prof. Ugo Bruzzo

Indice

Ringraziamenti

I primi, doverosi, ringraziamenti vanno certamente a coloro i quali, in maniera più diretta, hanno reso possibile, e piacevole, lo svolgimento di questa tesi. Grazie quindi al mio relatore Ugo Bruzzo, che mi ha insegnato moltissimo in pochissimo tempo, con professionalità, disponibilità e pazienza, e che è una delle persone più simpatiche e cordiali che conosca. Grazie al mio relatore interno Nicola Maggiore, sia come mio passato insegnante che per i suoi consigli, sia professionali sia logistici, di cui ho potuto beneficiare durante il lavoro. Grazie infine a Francesco Fucito, per aver lavorato con noi, permettendomi così di imparare molto anche da lui e per essere stato così simpatico e disponibile pur senza avere un ruolo ufficiale nell'ambito di questa tesi.

Tra gli amici con cui, magari in maniera indiretta, mi sento più in debito vorrei citare Lucio, tesista di Ugo prima di me e, in quanto tale, valida guida nei momenti difficili; Andrea, interlocutore in numerose fruttuose discussioni; Peach, compagno di viaggio per quattro anni sulla strada del Dipartimento di Fisica, Bista, con cui condivido tanti interessi; e Costanza, mia confidente e amica affezionata.

Questa tesi è solo il culmine di un'avventura universitaria per me estremamente positiva. Non ho mai avuto, dal momento della scelta del corso di studi, troppi dubbi sul fatto che questa fosse la mia strada, e ogni anno che mi sono lasciato alle spalle è stato una conferma in questo senso. Amo molto ciò di cui ho scelto di occuparmi, è vero, ma s'ingannerebbe chi pensasse che questo possa essere sufficiente a rendermi soddisfatto, oggi che sono all'epilogo di questo mio "cursus studiorum".

Sono certo, infatti, che non sarebbe così dolce di soddisfazione e (già!) amaro di nostalgia il sapore che resta dopo questi cinque anni, se non fosse per molte delle persone che ho avuto il piacere di incontrare in questo lasso di tempo. Tutte, chi più chi meno, lasceranno un segno indelebile nella mia vita futura, dai contorni ancora così confusi.

Grazie allora a tutti quei professori, ricercatori, dottorandi, insomma a tutti quegli insegnanti che con tanta passione hanno esercitato la loro professione anche a mio beneficio. Tra di essi ci sono persone che hanno contribuito a fare di me quello che sono, sul piano professionale.

Grazie poi ai miei amici, fisici e non, in mezzo ai quali si nascondono donne e uomini di grandissime qualità, con cui ho speso alcuni tra i momenti più stimolanti della mia vita. Grazie per avermi aiutato, sopportato, ascoltato, amato, compreso, coinvolto e molto altro. Tra di essi ci sono persone che hanno contribuito a fare di me quello che sono, sul piano personale.

Grazie infine alla mia famiglia, poichè, da ben prima dell'inizio della mia avventura universitaria, con amore mi ha dapprima educato, poi sostenuto e consigliato, sempre con grande equilibrio e, tuttavia, senza mai far mancare quel contrasto generazionale che permette di sviluppare una personalità indipendente. Grazie mamma e papà poichè voi, più di tutti, avete contribuito a fare di me quello che sono, in tutti i sensi.

Infine desidero dedicare l'impegno con cui ho affrontato questo lavoro a Pasquale Scarfi, la persona che forse meno di tutti avrebbe compreso, ma certamente più di tutti avrebbe apprezzato questa tesi di laurea.

Introduzione

Questa tesi si divide in due parti. Nel primo capitolo, di argomento prettamente matematico, viene introdotto l'ambiente geometrico degli *algebroidi di Lie* e, in quest'ambito, viene sviluppata una teoria dell'integrazione che generalizza il comune integrale su varietà differenziabili (coinvolgendo, tra l'altro, anche variabili anticommutanti). Il punto più importante sta nella presentazione di un risultato originale che consiste in una *formula di localizzazione* per i suddetti integrali generalizzati. Tale formula, sotto opportune condizioni, riduce il calcolo dell'integrale ad una somma finita. In quanto tecnica di integrazione, essa è molto generale e le possibili applicazioni appaiono varie e numerose.

Nel secondo capitolo si trova una delle possibili applicazioni della formula di localizzazione ad un caso di interesse fisico. In particolare l'obiettivo sta nel calcolo della funzione di partizione (nel senso degli integrali di cammino) di teorie di campo supersimmetriche (precisamente $\mathcal{N} = 2$ SYM e $\mathcal{N} = 1$ SYM), nell'ambito dell'approssimazione semiclassica e del calcolo istantonico. Tale applicazione è resa possibile da un'accurata geometrizzazione della teoria fisica, a cui è dedicata gran parte del capitolo. Si intuisce facilmente come la possibilità di trattare esplicitamente l'integrazione su variabili anticommutanti sia vantaggiosa nello studio della meccanica quantistica dei campi. E' interessante altresì notare come le ipotesi di applicabilità della formula di localizzazione siano qui soddisfatte grazie alle peculiarità della teoria fisica in esame (in particolare grazie alla supersimmetria stessa). La nostra attenzione sarà focalizzata in realtà, più che sugli aspetti tecnici del calcolo, sulla presenza o meno del fenomeno della localizzazione che permette, sì, le suddette semplificazioni, ma che nasconde verosimilmente anche un significato fisico più profondo. Tale fenomeno si presenta in maniera estremamente naturale nel caso $\mathcal{N} = 2$ SYM, mentre pare non comparire per la teoria $\mathcal{N} = 1$ SYM.

La nostra formula di localizzazione è una generalizzazione della nota formula di localizzazione in coomologia equivariante (per cui si veda, ad esempio [8]) all'ambiente degli algebroidi di Lie, di cui si trova una presentazione in [14][19]. Partendo da un'idea esposta in [22], si è sviluppata una coomologia equivariante degli algebroidi di Lie e, in quest'ambito, si è mostrata la formula in questione.

Per quanto riguarda l'applicazione fisica, il calcolo della funzione di partizione, essa si inserisce nel più generale ambito dello studio degli effetti *non perturbativi* delle teorie di gauge supersimmetriche non abeliane (SYM). Infatti, in anni recenti, grazie alle potenti tecniche proposte nei celebrati lavori di Seiberg e Witten [36][37], basate sul prepotenziale, molti nuovi risultati sono stati trovati, anche in relazione ad analoghi effetti in teoria delle stringhe. Questo ha portato alla volontà, da parte di molti autori, di verificare le assunzioni su cui si basano i risultati in [36][37] attraverso metodi indipendenti, uno dei quali è il calcolo (super-)istantonico. Una valutazione diretta degli effetti non perturbativi è infatti possibile attraverso il calcolo della funzione di partizione o dei correlatori rilevanti per la teoria di interesse. Gli ultimi anni hanno visto notevoli progressi in questo senso, poichè si è mostrato che tali calcoli, in alcuni casi, possono essere svolti esplicitamente.

Questo, naturalmente, è solo il punto di arrivo di un viaggio ben più lungo, che prende le mosse addirittura dalla prima introduzione delle soluzioni istantoniche alle equazioni di Yang-Mills, da parte di Belavin, Polyakov et al., in [4]. Il calcolo istantonico, infatti, può essere esteso all'ambito supersimmetrico (si veda [18] per una completa esposizione di questo punto), grazie anche alle osservazioni di Atiyah, Hitchin e Singer [3], fornendo un potente mezzo per gestire l'integrazione sui cammini nell'*approssimazione semiclassica*. In particolare, la possibilità di trattare lo spazio delle configurazioni classiche di alcuni campi come una varietà differenziabile, opportunamente coordinatizzata tramite i dati ADHM (si veda [2][1][15]), permette di ridurre l'integrale funzionale sui cammini di Feynman ad un integrale ordinario [16][17][21]. Questo, unitamente all'introduzione del cosiddetto twist per $\mathcal{N} = 2$ SYM (si veda ad esempio [40]), apre la strada ad una riformulazione del problema in termini di teorie di campo topologiche. In quest'ambito si situano vari lavori [5][6], che culminano con la possibilità di scrivere l'azione super Yang-Mills come una forma esatta rispetto all'operatore BRST della teoria [13]. Questo riduce il calcolo alla valutazione di un termine di bordo e i relativi risultati in [25][26], validi per il valore 2 del numero istantonico, vengono generalizzati in [34]. Quest'ultimo lavoro deriva in realtà da una linea di ricerca mirata al calcolo di invarianti topologici con l'aiuto delle teorie di campo [28][30][31].

Un interessante approccio alternativo al calcolo in [34] appare in [20]. E' la comparsa delle tecniche di localizzazione proprie della coomologia equivariante (ordinaria) nell'ambito del calcolo istantonico. Affinchè sia possibile usare la formula di localizzazione, l'azione della teoria SYM sotto studio deve essere interpretata come una forma differenziale sopra lo spazio dei moduli istantonici. Questo è naturale solo nel caso di $\mathcal{N} = 2$ SYM [41], poichè qui i moduli fermionici possono essere interpretati appunto come forme differenziali sullo spazio dei moduli istantonici. Una generalizzazione delle tecniche di localizzazione, basata sul linguaggio delle supervarietà, che permette di trattare casi diversi dalla suddetta $\mathcal{N} = 2$ SYM, si trova infine in [12] e ancor più in [11], lavoro, quest'ultimo, da cui questa tesi prende le mosse.

Rispetto a quanto esposto in [11], la nostra tesi introduce una nuova formula di localizzazione espressa in un nuovo linguaggio. L'ambiente geometrico degli algebroidi di Lie si rivela infatti estremamente naturale per lo sviluppo di una coomologia equivariante "generalizzata", anche se, come spiegato nel capitolo 1, esso è riconducibile all'ambiente delle supervarietà utilizzato in [11]. In questa diversa ottica, l'analogia con la coomologia equivariante ordinaria è maggiormente manifesta e la formulazione della localizzazione avviene in una forma più generale ed elegante, nonchè più facilmente applicabile a numerosi esempi. Infine l'interpretazione delle quantità proprie delle teorie di campo supersimmetriche in termini di geometria degli algebroidi di Lie è estremamente chiara e completamente controllata dall'individuazione del fibrato dei moduli fermionici e dall'operatore BRST, entrambi facilmente identificabili a partire dalla teoria fisica.

Capitolo 1

Algebroidi di Lie e localizzazione

1.1 Generalità

In questo primo capitolo, di argomento strettamente matematico, presenteremo un ambiente geometrico, quello degli algebroidi di Lie, atto a generalizzare il concetto di fibrato tangente ad un varietà. Esso costituisce un modo per estendere ad un fibrato vettoriale A (e al suo duale A^*) la geometria tipica dello spazio tangente (e cotangente). La derivata di Lie e il differenziale esterno sono solo due esempi delle strutture geometriche che è possibile trasferire ad un algebroide di Lie A. Un'altro esempio consiste nella possibilità di definire una coomologia e una teoria dell'integrazione delle sezioni dell'algebra esterna di A^*. Questa teoria dell'integrazione generalizzata (equivalente all'integrazione bereziniana su supervarietà) coinvolge, in qualche senso, più chiaro nel seguito, variabili anticommutanti, e perciò trova una naturale applicazione in teoria dei campi. Per ulteriori approfondimenti si veda, ad esempio [14][19]
Infine, nella parte conclusiva del capitolo, presentiamo un risultato originale consistente in una formula di localizzazione per l'integrazione di cui sopra, valida nell'ambito di una coomologia equivariante degli algebroidi di Lie. Essa è l'estensione di una nota formula riguardante la coomologia equivariante ordinaria. Noi non esporremo tale versione "classica" di localizzazione, poichè essa è contenuta nel nostro approccio generalizzato, tuttavia può essere utile, ai fini di una comprensione più profonda, familiarizzare con la coomologia equivariante ordinaria, ad esempio su [8].
La formula di localizzazione è un mezzo di notevole versatilità. Essa facilita il calcolo di integrali (generalizzati, come detto). Come tale, possiede numerose applicazioni, di cui quella approfondita nel prossimo capitolo e riguardante le teorie di gauge supersimmetriche, è solo un esempio. Un altro possibile campo di applicazione di interesse fisico

è certamente quello dei sistemi integrabili, poichè, come si vedrà, le varietà di Poisson e le varietà simplettiche sono associate in maniera naturale ad algebroidi di Lie. Si intravedono infine numerose applicazioni di carattere più strettamente matematico, o fisico-matematico, come il calcolo di gruppi di coomologia, etc.

1.2 Algebroidi di Lie

Definizione 1.2.1 *Un algebroide di Lie su una varietà X è un fibrato vettoriale (reale) A su X unitamente ad una mappa di fibrati $a: A \longrightarrow \mathrm{T}X$ (detta ancora) e ad una struttura di algebra di Lie $[\cdot,\cdot]_A$ su $\Gamma(A)$, tali che:*

1. *La mappa indotta $a: \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}X)$ è un morfismo di algebre di Lie.*
2. *Per ogni $f \in C^\infty(X)$ e $v,\ w \in \Gamma(A)$ sussiste la seguente identità di Leibniz:*

$$[v,\ fw]_A = f[v,\ w]_A + (a(v)f)w$$

La struttura di algebra di Lie presente sul fibrato A permette di definire una derivata di Lie sull'algebroide ponendo:

$$\mathrm{L}_v w = [v,\ w]_A \tag{1.1}$$

$$\mathrm{L}_v f = a(v)f \tag{1.2}$$

Definizione 1.2.2 *Un morfismo di algebroidi di Lie $(A, a) \to (A', a')$ è un morfismo di fibrati vettoriali $\phi\colon A \to A'$ tale che:*

1. *la mappa $\phi\colon \Gamma(A) \to \Gamma(A')$ è un morfismo di algebre di Lie;*
2. *il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "a"'] & A' \arrow[d, "a'"] \\ & TM \end{tikzcd}$$

commuta.

Un modo utile di guardare ad un algebroide di Lie è come un fibrato tangente alternativo per la varietà X. In tal senso il passo successivo più naturale è di dotarlo di una struttura che imiti anche la geometria differenziale dello spazio tangente. Grazie agli assiomi di cui sopra è possibile portare avanti su A sostanzialmente tutte le costruzioni

geometro-differenziali proprie dello spazio tangente.
Sia, pertanto, $(A, a, [\cdot,\cdot])$ un algebroide di Lie sopra X e sia $\wedge^\bullet A^*$ l'algebra esterna del suo duale A^*.

Definizione 1.2.3 *Definiamo un differenziale esterno* $\delta : \Gamma(\wedge^k A^*) \longrightarrow \Gamma(\wedge^{k+1} A^*)$ *ponendo:*

$$\begin{aligned} \delta\theta(v_1,\ldots,v_{k+1}) = & \sum_i (-1)^k a(v_i)\theta(v_1,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_{k+1}) + \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\theta([v_i,\ v_j]_A,\ v_1,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_{k+1}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove $\theta \in \Gamma(\wedge^k A^*)$ *e* $v_1,\ldots,v_{k+1} \in \Gamma(A)$.

Grazie agli assiomi di algebroide di Lie su A, tale operatore gode delle seguenti proprietà:

1. δ è $\mathbb{R}$-lineare,
2. $\delta^2 = 0$,
3. δ è super-derivazione di grado 1, cioè:
$$\delta(\theta \wedge \nu) = \delta\theta \wedge \nu + (-1)^{|\theta|}\theta \wedge \delta\nu$$
4. l'aggiunta $a^\times$ dell'ancora a intreccia i differenziali esterni δ e d:
$$\delta \cdot a^\times = a^\times \cdot \mathrm{d} \tag{1.4}$$

La tripla $(\Gamma(\wedge^\bullet A^*), \wedge, \delta)$ forma un'algebra differenziale gradata, come l'usuale algebra delle forme differenziali. La coomologia risultante è indicata con $H^\bullet_A(M)$ ed è chiamata coomologia dell'algebroide di Lie A. Da essa è possibile recuperare la struttura di algebroide di Lie:

- l'ancora a è ottenuta attraverso la formula:
$$a(v)f = (\delta f)(v) \tag{1.5}$$
dove $v \in \Gamma(A)$ e $f \in C^\infty(M)$,
- la parentesi di Lie $[\cdot,\cdot]_A$ è determinata da:
$$\begin{aligned} [v,\ w]_A \lrcorner\theta &= a(v)\cdot\theta(w) - a(w)\cdot\theta(v) - \delta\theta(v,\ w) \\ &= v\lrcorner\delta(w\lrcorner\theta) - w\lrcorner\delta(v\lrcorner\theta) - (v\wedge w)\lrcorner\delta\theta \end{aligned} \tag{1.6}$$

Concludiamo così che esiste una corrispondenza uno ad uno tra strutture di algebroide di Lie su A e operatori differenziali su $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ soddisfacenti le proprietà di cui sopra.

Nota 1.2.4 $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ può essere visto come lo spazio delle superfunzioni su una supervarietà. Non ci soffermeremo ad esporre il linguaggio delle supervarietà, che non verrà utilizzato nel seguito, ma lo riterremo conosciuto nel notare le analogie con l'ambiente degli algebroidi. Tuttavia, per chi volesse approfondire, due referenze sono, ad esempio, [10][7][27].
Nel linguaggio delle supervarietà, δ è un campo vettoriale (poichè è una derivazione) dispari (poichè è di grado 1) integrabile, nel senso che il suo supercommutatore con se stesso è nullo:

$$[\delta,\ \delta] = \delta\delta - (-1)^1\delta\delta = 2\delta^2 = 0$$

Perciò possiamo dire che un algebroide di Lie è una supervarietà con un supercampo vettoriale dispari integrabile. △

La presenza del differenziale δ appena definito permette di estendere a $\Gamma(\wedge^\bullet A)$, campi multivettoriali, le parentesi di Lie sull'algebroide. Se v e w sono campi multivettoriali omogenei e $\theta \in \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$, si pone:

$$\begin{aligned}[v,\ w]_A \lrcorner \theta =&(-1)^{(|v|-1)(|w|-1)} v \lrcorner \delta(v \lrcorner \theta) - w \lrcorner \delta(v \lrcorner \theta)\\ &- (-1)^{|v|-1}(v \wedge w) \lrcorner \delta\theta\end{aligned} \tag{1.7}$$

Esempio 1.2.5 L'esempio più semplice di algebroide di Lie è quello banale, ottenuto quando $A = \mathrm{T}M$ e l'ancora è l'identità. In questo caso la coomologia di A è l'usuale coomologia di de Rham di M. △

Esempio 1.2.6 Se M è un solo punto, allora un algebroide di Lie su M è un'algebra di Lie e la coomologia dell'algebroide è la coomologia di Chevalley dell'algebra di Lie. △

Esempio 1.2.7 Un ulteriore esempio è associato ad una varietà di Poisson (M, P). In questo caso $A = \mathrm{T}^*M$ con la parentesi di Lie delle forme differenziali:

$$[\alpha, \beta]_A = -\mathcal{L}_{P(\alpha)}\beta + \mathcal{L}_{P(\beta)}\alpha - \mathrm{d}P(\alpha, \beta)$$

e l'ancora è il tensore di Poisson (a meno del segno). Tale parentesi è compatibile con la parentesi di Poisson sulle funzioni nel senso che:

$$[\mathrm{d}f, \mathrm{d}g]_A = \mathrm{d}\{f, g\}$$

La coomologia di A è la coomologia di Lichnerowicz-Poisson di (M, P). △

Esempio 1.2.8 Sia (M, P) una varietà di Poisson, con P tensore di Poisson regolare, e sia S la distribuzione simplettica. Allora il fibrato duale S^* è un quoziente di T^*M chiuso rispetto alla parentesi indotta dalla parentesi delle forme differenziali introdotta nell'esempio precedente, e su cui P induce un morfismo lineare, (denotato ancora con lo stesso simbolo) $P\colon S^* \to \mathrm{T}M$, così che (S^*, P) è a sua volta un algebroide di Lie. In questo caso la coomologia dell'algebroide di Lie è la coomologia di Lichnerowicz-Poisson tangenziale di (M, P). △

Esempio 1.2.9 In questo e nel prossimo esempio M è una varietà complessa, e complessifichiamo il fibrato tangente $\mathrm{T}M$. Il fibrato tangente complessificato possiede uno splitting integrabile $\mathrm{T}M \otimes \mathbb{C} = \mathrm{T}^{1,0}M \oplus \mathrm{T}^{0,1}M$. Perciò possiamo prendere $A = \mathrm{T}^{1,0}M$ e l'iniezione $\mathrm{T}^{1,0}M \hookrightarrow \mathrm{T}M \otimes \mathbb{C}$ come ancora. In questo caso il differenziale δ è l'operatore ∂ e la coomologia risultante è la complessa coniugata della coomologia di Dolbeault $H^{0,\bullet}_{\overline{\partial}}(M)$, cioè è la coomologia $H^\bullet(M, \overline{\mathcal{L}}_X)$ del fascio delle funzioni anti-olomorfe. △

Esempio 1.2.10 Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, prendiamo $A = \mathrm{T}M \otimes \mathbb{C}$ con ancora data dalla proiezione $a : \mathrm{T}M \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{T}^{1,0}M$ e parentesi data da:

$$[\alpha, \beta]_A(f) = \alpha^{1,0}(\beta(f)) - \beta^{1,0}(\alpha(f))$$

Il differenziale dell'algebroide risultante è l'operatore ∂, così che si ha:

$$H^\bullet(A) \simeq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^{\bullet,k}_{\overline{\partial}}(M)$$

△

Esempio 1.2.11 Sia P un fibrato principale su M con gruppo strutturale G. Si ha la sequenza esatta di Atiyah di fibrati vettoriali su M:

$$0 \to \mathrm{ad}(P) \to \mathrm{T}P/G \to \mathrm{T}M \to 0$$

(una connessione su P è uno spezzamento di tale sequenza). Sulle sezioni globali di $\mathrm{T}P/G$ c'è una struttura naturale di algebra di Lie, e prendendo la suriezione $\mathrm{T}P/G \to \mathrm{T}M$ come ancora, otteniamo un algebroide di Lie — l'*algebroide di Atiyah* associato al fibrato principale P.

Anche ad un fibrato vettoriale E su M è possibile associare un algebroide di Atiyah: in questo caso si ha la sequenza esatta:

$$0 \to \mathrm{End}(E) \to \mathrm{Diff}_1(E) \to \mathrm{T}M \to 0 \tag{1.8}$$

dove $\mathrm{Diff}_1(E)$ è il fibrato degli operatori differenziali di ordine 1 su E. In tal modo $\mathrm{Diff}_1(E)$, con la struttura naturale di algebra di Lie sulle sue sezioni globali e la mappa naturale $\mathrm{Diff}_1(E) \to \mathrm{T}M$ come ancora, è un algebroide di Lie.

Algebroidi di Lie la cui ancora sia surgettiva, come nel caso degli algebroidi di Atiyah, si dicono *transitivi*.

Come caso particolare prendiamo l'esempio in cui E sia il fibrato vettoriale banale $\mathcal{C}$ di rango 1. In questo caso la sequenza (1.8) si spezza, e il complesso $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ è dato da:

$$\Gamma(\wedge^0 A^*) = \Omega^0(M), \qquad \Gamma(\wedge^i A^*) = \Omega^i(M) \oplus \Omega^{i-1}(M) \quad \text{per} \quad i > 0$$

con il differenziale:

$$\begin{aligned} \delta(f) &= (-\mathrm{d}f, f) \quad \text{se} \quad f \in \Gamma(\wedge^0 A^*), \\ \delta(\alpha, \beta) &= (-\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta + \alpha) \quad \text{se} \quad (\alpha, \beta) \in \Gamma(\wedge^i A^*) \quad \text{con} \quad i > 0 \end{aligned}$$

cioè $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ è il cono (nel senso dell'algebra omologica) associato al morfismo identità $\Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$. Tale complesso è aciclico, cioè la coomologia dell'algebroide di Lie $\mathcal{C} \oplus \mathrm{T}M$ è nulla a tutti gli ordini. $\triangle$

1.3 Coomologia equivariante degli algebroidi di Lie

Sia $A(M, a, [\cdot,\cdot])$ un algebroide di Lie e G un gruppo di Lie che agisce su M attraverso l'azione $\rho_g : M \longrightarrow M$. Come noto, tale azione passa ai campi vettoriali su M per push-forward $\rho_{g*} : \Gamma(\mathrm{T}M) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}M)$ e alle 1-forme su M per pull-back ${\rho_g}^* : \Gamma(\mathrm{T}^*M) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}^*M)$. In tal modo resta definita la derivata di Lie di forme e vettori lungo il campo vettoriale generato da un elemento ξ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho^*_{\exp(-t\xi)}\right]_{t=0} : \Gamma(\mathrm{T}^*M) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}^*M) \\ \mathcal{L}_\xi &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho^{-1}_{\exp(-t\xi)_*}\right]_{t=0} : \Gamma(\mathrm{T}M) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}M) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Assumiamo ora la presenza di un'azione di G anche sul fibrato A^*, $\widehat{\rho}_g : \Gamma(A^*) \longrightarrow \Gamma(A^*)$ e imponiamo che l'ancora a intrecci queste azioni, cioè, per ogni $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*M)$, si abbia:

$$[\widehat{\rho}_g \cdot a^\times](\omega) = [a^\times \cdot \rho^*_g](\omega) \tag{1.10}$$

Similmente a quanto accade nello spazio tangente, è possibile definire, in accordo con la definizione di derivata di Lie sull'algebroide, una derivata di Lie di sezioni di A^* lungo il campo vettoriale generato da un elemento ξ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G:

$$\widetilde{\mathrm{L}}_\xi = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\rho}_{\exp(-t\xi)}\right]_{t=0} : \ \Gamma(A^*) \longrightarrow \Gamma(A^*) \tag{1.11}$$

e, grazie alla (1.10), si ha la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{T}^*M) & \xrightarrow{a^\times} & \Gamma(A^*) \\ {\scriptstyle \mathcal{L}_\xi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{L}}_\xi} \\ \Gamma(\mathrm{T}^*M) & \xrightarrow{a^\times} & \Gamma(A^*) \end{array} \tag{1.12}$$

Nel linguaggio delle supervarietà questo operatore può essere visto come un supercampo vettoriale pari sulla supervarietà $\mathfrak{M}$ associata all'algebroide:

$$\hat{\xi}^* = \xi^\alpha T^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^\alpha e^{*B} U^A_{\alpha B} e_A \tag{1.13}$$

dove $\xi^\alpha T^i_\alpha$ sono le componenti locali del generatore ξ^* dell'azione di G su M e $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di sezioni di A.

Tale concetto di derivata di Lie sulle sezioni di A^* non è ancora sufficientemente operativo nell'implementazione della coomologia equivariante dell'algebroide, che è il nostro obiettivo. Perciò daremo ora un'ulteriore definizione di derivata di Lie, in una forma più adatta ai nostri scopi. Tuttavia mostreremo successivamente come essa coincida con quella naturale appena trattata, almeno in un certo dominio di definizione.
A tal fine, seguendo un'idea di Ginzburg [22], richiediamo la presenza di un morfismo di algebre di Lie $b : \ \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(A)$ atto a trasferire all'algebroide il concetto di campo vettoriale generatore dell'azione del gruppo G su M, tale cioè che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{b} & \Gamma(A) \\ & {\scriptstyle *}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle a} \\ & & \Gamma(\mathrm{T}M) \end{array} \tag{1.14}$$

Tale morfismo permette la definizione della derivata di Lie su $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ in analogia con la formula omotopica di Cartan:

$$\mathrm{L}_\xi := i_{b(\xi)} \cdot \delta + \delta \cdot i_{b(\xi)} \tag{1.15}$$

per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, e, più in generale:

$$\mathrm{L}_v := i_v \cdot \delta + \delta \cdot i_v \tag{1.16}$$

per ogni $v \in \Gamma(A)$. Si noti che tale definizione di derivata di Lie equivale a:

$$\langle \mathrm{L}_v \alpha,\ X\rangle + \langle \alpha,\ [v,\ X]\rangle = a(v) \cdot \langle \alpha,\ X\rangle \tag{1.17}$$

per ogni $\alpha \in \Gamma(\wedge^k A^*)$ e $x \in \Gamma(\wedge^k A)$.
Grazie alla commutatività dei diagrammi (1.14) e (1.12) si ha:

$$(\mathrm{L}_\xi \cdot\ a^\times)\ =\ (a^\times \cdot \mathcal{L}_\xi)\ =\ (\widetilde{\mathrm{L}}_\xi \cdot a^\times) \tag{1.18}$$

da cui troviamo il legame tra le due definizioni di derivata di Lie fornite:

$$\mathrm{L}_\xi\Big|_{\mathrm{im}\ a^\times} = \widetilde{\mathrm{L}}_\xi\Big|_{\mathrm{im}\ a^\times} \tag{1.19}$$

Grazie a tale concetto di derivata di Lie sulle sezioni del duale A^* dell'algebroide A, sulle sezione della cui algebra esterna $\wedge^\bullet A^*$ è anche definito il differenziale δ, siamo in grado di imitare il processo che, nel caso dello spazio tangente ad una varietà, porta alla definizione della coomologia equivariante.
A tal fine considereremo l'algebra $\mathfrak{U}^\bullet = \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ che porta l'azione di G data da:

$$(g \cdot \alpha)(\xi) = \widehat{\rho}_g(\alpha(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)) \tag{1.20}$$

dove, con lieve abuso di notazione, abbiamo indicato con $\widehat{\rho}_g$ l'azione indotta su $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$.
Similmente a quanto accade nella caso dell'ordinaria coomologia equivariante, si noti che:

$$(\exp(-t\xi) \cdot \alpha)(\xi) = \widehat{\rho}_{\exp(-t\xi)}(\alpha(\xi))$$

come nel primo addendo del rapporto incrementale della (1.11).
Su $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ si consideri la $\mathbb{Z}$-gradazione:

$$\deg(P \otimes f) = 2\deg(P) + \deg(f) \tag{1.21}$$

dove $\deg(P)$ è il grado del polinomio $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ e $\deg(f)$ è il grado dell'elemento $f \in \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$. Indicheremo con $\mathfrak{U}^\bullet_G$ la sottoalgebra di $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ formata dagli elementi F per cui $\mathrm{L}_\xi F = 0$ (la quale, nell'immagine di $a^\times$, coincide con la sottoalgebra formata dagli elementi G-invarianti).
Imitiamo ora quanto accade nella ordinaria coomologia equivariante, in cui si definisce un differenziale equivariante che coincida con il differenziale di Cartan sulle funzioni e che quadra alla derivata di Lie, dando la seguente definizione:

Definizione 1.3.1 *Il differenziale equivariante sull'algebroide di Lie $A(M, a, [\cdot,\cdot])$ è una derivazione dispari $\delta_\mathfrak{g}$ di $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ di $\mathbb{Z}$-grado 1 la cui azione su $F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ è definita da:*

$$(\delta_\mathfrak{g} F)(\xi) = \delta F(\xi) - i_{b(\xi)} F(\xi) \tag{1.22}$$

Dalla definizione, unitamente alla (1.4) e alla commutatività del diagramma (1.14), si ottiene:

$$\delta_{\mathfrak{g}} \cdot a^{\times} = a^{\times} \cdot \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \tag{1.23}$$

Inoltre si verifica per calcolo diretto che:

$$[(\delta_{\mathfrak{g}})^2 F](\xi) = \mathrm{L}_{\xi} F(\xi) \tag{1.24}$$

perciò $(\mathfrak{U}_G,\ \delta_{\mathfrak{g}})$ è un complesso la cui coomologia, detta coomologia equivariante dell'algebroide di Lie A, indicheremo con $H^{\bullet}_G(A)$.

1.4 Coomologia twistata degli algebroidi di Lie

Descriveremo ora una forma twistata (si ricordi che un fibrato vettoriale E twistato per un fibrato F è, per definizione, il fibrato vettoriale prodotto $E \otimes F$) della coomologia dell'algebroide di Lie A. Sia Q_A il line bundle $\wedge^r A \otimes \Omega^m_M$ dove $r = \mathrm{rk}A$ e $m = \mathrm{dim}M$. Si definisca poi un differenziale $D:\ \Gamma(Q_A) \longrightarrow \Gamma(A^* \otimes Q_A)$ tale che, se $\tau = X \otimes \mu \in Q_A$ e $s \in \Gamma(A)$:

$$(D\tau)(s) = [s,\ X]_A \otimes \mu + X \otimes \mathcal{L}_{a(s)}\mu \tag{1.25}$$

Si consideri il complesso twistato $\widetilde{C}^p_A = \Gamma(\wedge^{\bullet} A^* \otimes Q_A)$ con il differenziale twistato $\widetilde{\delta}$ definito da:

$$\widetilde{\delta}(\xi \otimes \tau) = \delta\xi \otimes \tau + (-1)^{|\xi|}\xi \otimes D\tau \tag{1.26}$$

Denoteremo la risultante coomologia twistata $H^{\bullet}(A, Q_A)$.

Sia M compatta ed orientata; allora esiste un pairing non degenere:

$$\begin{aligned} C^k_A \otimes \widetilde{C}^{r-k}_A &\ \to\ \mathbb{R} \\ \xi \otimes (\eta \otimes X \otimes \mu) &\ \mapsto\ \int_M \xi \otimes (\eta \otimes X \otimes \mu) := \int_M ((\xi \wedge \eta) \lrcorner X)\mu \end{aligned}$$

Esiste una versione del teorema di Stokes per il complesso $\widetilde{C}^{\bullet}_A$:

Proposizione 1.4.1 *Se $c \in \widetilde{C}^{r-1}_A$, allora:*

$$\int_M \widetilde{\delta} c = 0 \tag{1.27}$$

Prova: La formula segue dall'identità, provata per calcolo diretto:

$$\widetilde{\delta}(c) = (-1)^{r-1}\mathrm{d}(a(i_{\alpha}(\mu))) \tag{1.28}$$

dove $c = \xi \otimes X \otimes \mu$ e $\alpha = i_\xi(X)$. $\square$

Questo implica che il pairing di cui sopra discende alle coomologie; perciò si ha il pairing:

$$H^\bullet(A) \otimes H^{r-\bullet}(A, Q_A) \ \to \ \mathbb{R} \tag{1.29}$$

Considerando invece il complesso:

$$\mathfrak{Q}^\bullet = \mathfrak{U}^\bullet \otimes \Gamma(Q_A)$$

con il differenziale equivariante twistato $\widetilde{\delta}_{\mathfrak{g}}$ definito dalla sua azione sugli elementi indecomponibili:

$$\widetilde{\delta}_{\mathfrak{g}}(\omega \otimes X \otimes \mu) = \delta_{\mathfrak{g}}\omega \otimes X \otimes \mu + (-1)^{|\omega|} \otimes D(X \otimes \mu) \tag{1.30}$$

dove $\omega \in \mathfrak{U}^\bullet$ e $X \otimes \mu \in \Gamma(Q_A)$, e restringendo l'attenzione al complesso $\mathfrak{Q}^\bullet_G = \ker\widetilde{\delta}^2_{\mathfrak{g}}$ si ottiene anche una coomologia equivariante twistata $H^\bullet_G(A, Q_A)$ e un cup product:

$$H^i_G(A) \otimes H^k(A, Q_A) \ \to \ H^{i+k}_G(A, Q_A)$$

Nota 1.4.2 Fissiamo per un momento l'attenzione sulla definizione di integrale di un elemento $\gamma \otimes X \otimes \mu \in H^r(A, Q_A)$ data in questo paragrafo:

$$\int_M (\gamma \otimes X \otimes \mu) := \int_M (\gamma \lrcorner X)\mu$$

Mostreremo come tale definizione coincida con quella di integrale bereziniano sulla supervarietà associata all'algebroide di Lie A. Il nostro approccio all'integrale di Berezin è basato su [24].

Ricordiamo dapprima la definizione di fascio bereziniano. Sia $\mathfrak{M} = (M, \wedge^\bullet A^*)$ una supervarietà (m, r)-dimensionale, con M varietà orientata, e si indichi con $\Omega^m_{\mathfrak{M}}$ il fascio delle super-forme differenziali su $\mathfrak{M}$, e con $\mathcal{P}_r$ il fascio degli operatori differenziali gradati di ordine r su $\wedge^\bullet A^*$. Il fascio $\Omega^m_{\mathfrak{M}}$ ha una struttura naturale di $(\wedge^\bullet A^*)$-modulo gradato sinistro data dalla moltiplicazione delle forme per le superfunzioni. Il fascio $\mathcal{P}_r$ ha un'analoga struttura di $\wedge^\bullet A^*$-modulo gradato sinistro, ma anche un struttura (non equivalente) di $(\wedge^\bullet A^*)$-modulo gradato destro, data da:

$$(\mathcal{D} \cdot f)(g) = \mathcal{D}(fg)$$

dove $f, g \in \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ sono superfunzioni. Consideriamo su $\mathcal{P}_r$ tale struttura e prendiamo il prodotto tensoriale $\Omega^m_{\mathfrak{M}} \otimes_{(\wedge^\bullet A^*)} \mathcal{P}_r$.

Denotiamo la proiezione naturale $\Omega^m_{\mathfrak{M}} \to \Omega^m_M$ con una tilde. Il fascio $\Omega^m_{\mathfrak{M}} \otimes_{(\wedge^\bullet A^*)} \mathcal{P}_r$ ha un sottofascio $\mathcal{K}$ le cui sezioni ω sono tali che la m-forma differenziale $\widetilde{\omega(f)}$ su M

sia esatta per ogni superfunzione f a supporto compatto (più precisamente, $\widetilde{\omega(f)} = \mathrm{d}\eta$ per una $(m-1)$-forma a supporto compatto su M). Il quoziente $(\Omega^m_{\mathfrak{M}} \otimes_{(\wedge^\bullet A^*)} \mathcal{P}_r)/\mathcal{K}$ si indica con $\mathrm{Ber}(\mathfrak{M})$ ed è chiamato *fascio bereziniano* di $\mathfrak{M}$. Esso è un $(\wedge^\bullet A^*)$-modulo destro gradato localmente libero e, come tale è anche un C^∞_M-modulo.
Sulle sezioni a supporto compatto del fascio $\mathrm{Ber}(\mathfrak{M})$ si può definire un integrale (*integrale bereziniano*) come:

$$\int_{\mathfrak{M}} \omega = \int_M \widetilde{\lambda(1)}$$

dove λ è una qualunque sezione di $\Omega^m_{\mathfrak{M}} \otimes_{(\wedge^\bullet A^*)} \mathcal{P}_r$, la cui classe di equivalenza in $(\Omega^m_{\mathfrak{M}} \otimes_{(\wedge^\bullet A^*)} \mathcal{P}_r)/\mathcal{K}$ sia $[\lambda] = \omega$.
In pratica, dato un sistema di coordinate locali $(x^1, \dots, x^m, e^1, \dots, e^r)$, si ha, localmente:

$$\omega = \left[\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \otimes \frac{\partial}{\partial e^1} \cdots \frac{\partial}{\partial e^r}\right] f$$

e perciò:

$$\int_{\mathfrak{M}} \omega = \int_M f_{[r]} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^m$$

dove si è indicato con $f_{[r]}$ il termine di grado r della superfunzione f.
L'integrale bereziniano è noto, tra l'altro, per essere adatto a rendere rigoroso il concetto di integrare sopra i fermioni, cioè su variabili anticommutanti e, in questo senso, è largamente usato in teoria dei campi.
Dalla forma esplicita delle sezioni di $\mathrm{Ber}(\mathfrak{M})$ in coordinate è facile convincersi che $\mathrm{Ber}(\mathfrak{M}) \simeq H^r(A, Q_A)$ come C^∞_M-moduli, attraverso l'identificazione:

$$\omega = \left[\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \otimes \frac{\partial}{\partial e^1} \cdots \frac{\partial}{\partial e^r}\right] f \mapsto \left[f \otimes e_1 \wedge \ldots \wedge e_r \otimes \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m\right]$$

e che l'integrazione bereziniana coincide con quella sull'algebroide grazie all'identità:

$$\widetilde{\omega(1)} = (f \lrcorner (e_1 \wedge \ldots \wedge e_r)) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m$$

△

1.5 Localizzazione

In questa sezione dimostreremo una formula di localizzazione per la coomologia equivariante (twistata) degli algebroidi di Lie che estende quella, nota, per la ordinaria coomologia equivariante (si veda [8]). Iniziamo con l'assumere che M e G siano compatti, che M sia orientata, e che $\xi \in \mathfrak{g}$ sia tale che ξ^* abbia soltanto zeri isolati. Denotiamo con M_ξ l'insieme di tali zeri. Scegliamo infine una metrica h G-invariante su M.

Lemma 1.5.1 *Esiste una 1-forma λ su M tale che:*

(1) $\mathcal{L}_\xi \lambda = 0$*;*

(2) la forma non omogenea $\mathrm{d}_\xi \lambda = \mathrm{d}\lambda - i_{\xi^*}\lambda$ *sia invertibile in* $\Omega^\bullet(M)$ *fuori* M_ξ*;*

(3) in un intorno di ogni $p \in M_\xi$ *si abbia* $\lambda(\xi^*) = d_p^2$*, dove* d_p^2 *è la distanza geodetica dal punto p nella metrica h.*

Prova: Si scelga:

$$\lambda = \frac{d_p^2}{||\xi^*||^2} h(\xi^*)$$

attorno ad ogni $p \in M_\xi$ e poi si incollino queste forme con la 1-forma $h(\xi^*)$ (ristretta al complementare di M_ξ) usando una partizione dell'unità G-invariante. □

Nota 1.5.2 La sezione $\beta = a^\times(\lambda) \in \Gamma(A^*)$ soddisfa le condizioni:

(1) $\delta_\xi \beta = \delta\beta - i_{b(\xi)}\beta \in \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$ è invertibile fuori M_ξ;

(2) $\beta(b(\xi)) = d_p^2$ in un intorno di $p \in M_\xi$.

△

Lemma 1.5.3 *Se* $\gamma \in \mathfrak{Q}_G^\bullet$ *è tale che* $\widetilde{\delta}_{\mathfrak{g}}(\gamma) = 0$*, allora esiste una sezione ν del fascio* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \wedge^\bullet A^* \otimes Q_A$ *sull'insieme aperto* $M - M_\xi$ *tale che:*

$$\gamma_{|M-M_\xi} = \widetilde{\delta}_{\mathfrak{g}}(\nu)$$

Prova: Se $\gamma = \omega \otimes X \otimes \mu$ con $D(X \otimes \mu) = 0$, si scelga:

$$\nu = \frac{\beta \wedge \omega}{\delta_\xi \beta} \otimes X \otimes \mu$$

□

Assumendo ora che per un dato $\xi \in \mathfrak{g}$ il campo vettoriale ξ^* abbia soltanto zeri isolati e usando la stessa notazione del lemma precedente, calcoliamo l'integrale $\int_M \omega(\xi) \otimes X \otimes \mu := \int_M (\omega(\xi) \lrcorner X)\mu$. Per alleggerire la notazione poniamo:

$$\nu' = \frac{\beta \wedge \omega}{\delta_\xi \beta}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_M \omega(\xi)\otimes X\otimes\mu &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\cup_{p\in M_\xi}B_p^\epsilon}\widetilde{\delta}_{\mathfrak{g}}(\nu'\otimes X\otimes\mu)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\cup_{p\in M_\xi}B_p^\epsilon}\widetilde{\delta}(\nu'\otimes X\otimes\mu)\\
&= (-1)^{r-1}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\cup_{p\in M_\xi}B_p^\epsilon}\mathrm{d}[a(\nu'\lrcorner X)\lrcorner\mu]\\
&= (-1)^{r-1}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}\int_{S_p^\epsilon}a(\nu'\lrcorner X)\lrcorner\mu\\
&= (-1)^{r-1}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}\int_{S_p^\epsilon}a\left[\frac{a^\times(\lambda)\wedge\omega(\xi)}{\delta_\xi a^\times(\lambda)}\lrcorner X\right]\lrcorner\mu
\end{aligned}$$

dove B_p^ϵ (S_p^ϵ) è la palla (sfera) geodetica di raggio ϵ centrata in p. Poichè:

$$[\delta_\xi a^\times(\lambda)]^{-1} = [a^\times(\mathrm{d}_\xi\lambda)]^{-1} = a^\times[(\mathrm{d}_\xi\lambda)^{-1}] = -\frac{1}{d_p^2}a^\times\sum_{k=0}^{m/2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{d_p^2}\right)^k$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&\int_M \omega(\xi)\otimes X\otimes\mu\\
&= (-1)^r\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}\int_{S_p^\epsilon}a\left\{\left[\frac{1}{d_p^2}a^\times(\lambda)\wedge\sum_{i=0}^{F(m,r)}\omega_{[r-2-2i]}\wedge a^\times\left(\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{d_p^2}\right)^i\right)\right]\lrcorner X\right\}\lrcorner\mu
\end{aligned}$$

dove $F(m,r)=\min(\frac{m}{2}-1,\frac{r}{2}-1)$ e $\omega(\xi)_{[j]}$ denota la parte di grado j in $\wedge^\bullet A^*$.
Questa espressione può essere facilmente calcolata attuando un *riscalamento* di un fattore ϵ della distanza geodetica attorno ai punti p e simultaneamente riscalando della stessa quantità i generatori di A^*. In tal modo si mostra che l'integrale in questione è nullo quando $r<m$, mentre per $r\geq m$ sopravvive solo il contributo contenente il termine $\omega(\xi)_{[r-m]}$. Il calcolo esplicito è banale se si considera che, una volta attuato il rescaling, il termine $\dfrac{a^\times(\lambda)}{\delta_\xi a^\times(\lambda)}$ è omogeneo di grado 0 in ϵ.
In tal modo, l'unico contributo alla formula di localizzazione assume la forma:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}(-1)^r\int_{S_p^\epsilon}a\left[\left(a^\times(\lambda)\wedge(a^\times(\mathrm{d}\lambda))^{\frac{m-2}{2}}\wedge\omega_{[n-m]}\right)\lrcorner X\right]\lrcorner\mu\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}(-1)^r\int_{B_p^1}a\left[\left(a^\times(\mathrm{d}\lambda)^{m/2}\wedge\omega_{[n-m]}\right)\lrcorner X\right]\lrcorner\mu \qquad (1.31)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in M_\xi}(-1)^r\left(a_A^i a_B^j\frac{\partial\lambda_i}{\partial x^j}\right)^{m/2}\omega_{[n-m]C_1\ldots C_{n-m}}X^{\overline{AB}C_1\ldots C_{n-m}}\int_{B_p^1}\mu
\end{aligned}$$

dove ogni indice alto barrato sottintende $m/2$ indici ordinari saturati con la coppia omonima di indici bassi provenienti dal termine elevato appunto alla $m/2$.
La valutazione finale dell'integrale è meglio espressa se si sceglie come generatore del modulo $\Omega^m(M)$ la misura riemanniana associata ad h. In tal modo il termine $\lim \int_{B_p^1} \mu$ viene a coincidere con il volume della palla m-dimensionale in $\mathbb{R}^m$, cioè $\frac{\pi^{m/2}}{(m/2)!}$ (la cosa è facilmente dimostrata in coordinate geodetiche, considerando che in tal caso $\lim \sqrt{|h|} = 1$).
Infine introduciamo il morfismo lineare antisimmetrico $\overline{\mathrm{L}}_\xi(p) : A_p \longrightarrow A_p$ consistente nella composizione:

$$A_p \xrightarrow{\mathrm{L}_\xi} A_p \xrightarrow{a} \mathrm{T}_pM \xrightarrow{h} \mathrm{T}_p^*M \xrightarrow{a^\times} A_p^*$$

Allora la potenza esterna $\wedge^{m/2}\overline{\mathrm{L}}_\xi(p)$ (che chiameremo *Pfaffiano di* $\overline{\mathrm{L}}_\xi(p)$ e denoteremo $\mathrm{Pf}(\overline{\mathrm{L}}_\xi(p))$) è un elemento in $\wedge^m(A_p^*)$.

Definizione 1.5.4 *Se $\gamma = \sum_i \omega_i \otimes X_i \otimes \mu$, con μ misura riemanniana associata ad h e $D(X_i \otimes \mu) = 0$, ad ogni punto $p \in M_\xi$ possiamo associare il numero reale:*

$$R_{\gamma,\xi}(p) := (-1)^r \sum_i \{[\mathrm{Pf}(\overline{\mathrm{L}}_\xi(p)) \wedge \omega_i(\xi)] \lrcorner X_i\}_{[0]}(p) \tag{1.32}$$

il quale risulta indipendente dalla metrica h.

Abbiamo a questo punto dimostrato la seguente formula di localizzazione.

Teorema 1.5.5 *Sia M una varietà differenziabile $m-$dimensionale compatta e orientata su cui agisce un gruppo di Lie compatto G. Si supponga che $\xi \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ sia tale che il campo vettoriale fondamentale associato ξ^* abbia soltanto zeri isolati. Sia A un algebroide di Lie di rango k su M, e si assuma che esista un morfismo di algebre di Lie $b : \mathfrak{g} \to \Gamma(A)$ tale da rendere il diagramma (1.14) commutativo. Infine, sia $\gamma \in \mathfrak{Q}^\bullet$ equivariantemente chiusa, cioè $\widetilde{\delta}_\mathfrak{g}\gamma = 0$.*
Allora, se $r < m$ si ha $\int_M \gamma(\xi) = 0$, mentre se $r \geq m$ vale la seguente formula di localizzazione:

$$\int_M \gamma(\xi) = \frac{\pi^{m/2}}{(m/2)!} \sum_{p \in M_\xi} R_{\gamma,\xi}(p) \tag{1.33}$$

Nota 1.5.6 Se $r \geq m$ e il rango dell'endomorfismo a al punto p non è massimale (cioè se è minore di m), allora $R_{\gamma,\xi}(p) = 0$. $\triangle$

Capitolo 2

Supersimmetria, calcolo istantonico e localizzazione

2.1 Generalità

Nel presente capitolo verrà considerata una prima, importante, applicazione dei metodi di localizzazione esposti nel Capitolo 1 alle Teorie Super Yang-Mills (SYM). Tali teorie appartengono alla famiglia delle teorie di campo quanto-relativistiche (che, nei loro aspetti più basilari, saranno considerate note) e, in particolare, alla loro evoluzione supersimmetrica. Inoltre si tratta di teorie di gauge. L'applicazione richiede una formulazione rigorosa del setting geometrico di dette teorie. L'ambiente geometrico naturale in cui studiare i campi quanto-relativistici è costituito dai fibrati principali e vettoriali. In particolare verrà utilizzata e ritenuta nota l'interpretazione dei campi stessi quali sezioni (a valori operatoriali) di fibrati vettoriali (associati ad opportuni fibrati principali).
La prima parte del capitolo è dedicata all'esposizione, e in parte alla dimostrazione, di tutte quelle nozioni matematiche che non possono in generale essere date per scontate, ma che costituiscono un fondamentale prerequisito per la comprensione del suddetto setting geometrico (per ulteriori approfondimenti si può consultare [32], e [9] per la teoria dell'indice).
Nella seconda parte tali prerequisiti verranno sfruttati per preparare ed effettuare l'applicazione.

2.2 Prerequisiti

2.2.1 Classi caratteristiche

Sia $M(k,\ \mathbb{C})$ l'insieme delle matrici complesse $k \times k$. Indichiamo con $S^r\left(M(k,\ \mathbb{C})\right)$ lo spazio vettoriale dei funzionali r-lineari simmetrici su $M(k,\ \mathbb{C})$. Sia infine:

$$S^*\left(M(k,\ \mathbb{C})\right) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r\left(M(k,\ \mathbb{C})\right)$$

reso un'algebra (gradata) grazie al prodotto:

$$\widetilde{P}\widetilde{Q}(X_1, \ldots, X_{p+q}) := \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma} \widetilde{P}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\widetilde{Q}(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})$$

$$\widetilde{P} \in S^p\left(M(k,\ \mathbb{C})\right) \qquad \widetilde{Q} \in S^q\left(M(k,\ \mathbb{C})\right)$$

dove σ è una permutazione di $p+q$ elementi. Sia G un gruppo di matrici e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Possiamo allora considerare le restrizioni $S^r(\mathfrak{g})$ e $S^*(\mathfrak{g})$ degli oggetti sopra descritti.

Definizione 2.2.1 $\widetilde{P} \in S^r(\mathfrak{g})$ *è detto invariante se soddisfa:*

$$\widetilde{P}(\mathrm{Ad}_g A_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g A_r) = \widetilde{P}(A_1, \ldots, A_r) \tag{2.1}$$

per ogni $g \in G$ e $A_i \in \mathfrak{g}$.
L'insieme degli elementi invarianti di $S^r(\mathfrak{g})$ è indicato con $I^r(\mathfrak{g})$. L'insieme $I^*(\mathfrak{g})$ è una sottoalgebra di $S^*(\mathfrak{g})$.

Il polinomio di grado r definito da $P(A) := \widetilde{P}(A, \ldots, A)$ è detto polinomio invariante se $\widetilde{P}$ è un funzionale invariante.

La nozione di funzionale invariante viene estesa al dominio delle p-forme su una varietà M a valori in $\mathfrak{g}$ tramite:

$$\widetilde{P}(A_1\eta_1, \ldots, A_r\eta_r) := \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \widetilde{P}(A_1, \ldots, A_r)$$

e poi per r-linearità.

Teorema 2.2.2 (Chern-Weil) *Sia $E(M,\ G)$ un fibrato principale con 2-forma di curvatura $\mathcal{F}$ relativa alla connessione $\mathcal{A}$. Sia P un polinomio invariante definito sulle forme a valori in $\mathfrak{g}$ su M. Allora P soddisfa:*

(a) $\mathrm{d}P(\mathcal{F}) = 0$

(b) *Se $\mathcal{F}'$ è la 2-forma di curvatura corrispondente ad un'altra connessione $\mathcal{A}'$, allora la differenza $\mathcal{F}' - \mathcal{F}$ è una forma esatta.*

Prova: (a) E' sufficiente provare che $\mathrm{d}P(\mathcal{F}) = 0$ per un polinomio invariante P_r omogeneo di grado r. Si consideri dapprima l'identità:

$$\widetilde{P_r}(g_t^{-1}X_1g_t, \ldots, g_t^{-1}X_rg_t) = \widetilde{P_r}(X_1, \ldots, X_r)$$

dove $g_t = \exp tX$ e $X,\ X_i \in \mathfrak{g}$. Valutando in $t = 0$ la derivata della precedente espressione rispetto a t si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{r} \widetilde{P_r}(X_1, \ldots, [X_i, X], \ldots, X_r) = 0 \tag{2.2}$$

Sia ora A una p-forma a valori in $\mathfrak{g}$ e Ω_i una p_i-forma a valori in $\mathfrak{g}$. Senza perdere generalità possiamo scegliere $A = X\eta$ e $\Omega_i = X_i\eta_i$, dove $X,\ X_i \in \mathfrak{g}$ e η (η_i) è una p-forma (p_i-forma). Definendo:

$$[\Omega_i,\ A] := \eta_i \wedge \eta[X_i,\ X] = X_iX(\eta_i \wedge \eta) - (-1)^{p_ip}XX_i(\eta \wedge \eta_i)$$

notiamo che:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P_r}(\Omega_1, \ldots, [\Omega_i,\ A], \ldots, \Omega_r) = \\
&= \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i \wedge \eta \wedge \ldots \wedge \eta_r \widetilde{P_r}(X_1, \ldots, X_iX, \ldots, X_r) \\
&\quad - (-1)^{pp_i}\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta \wedge \eta_i \wedge \ldots \wedge \eta_r \widetilde{P_r}(X_1, \ldots, XX_i, \ldots, X_r) = \\
&= \eta \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)} \widetilde{P_r}(X_1, \ldots, [X_i,\ X], \ldots, X_r)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Da questa e dalla (2.2), troviamo:

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{p(p_1+\ldots+p_i)} \widetilde{P_r}(\Omega_1, \ldots, [\Omega_i,\ A], \ldots, \Omega_r) = 0 \tag{2.4}$$

Dopodichè si consideri la derivata:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{P_r}(\Omega_1, \ldots, \Omega_r) &= \mathrm{d}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r)\widetilde{P_r}(X_1, \ldots, X_r) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{p(p_1+\ldots+p_{i-1})}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\eta_i \wedge \ldots \wedge \eta_r)\widetilde{P_r}(X_1, \ldots, x_i, \ldots, X_r) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{p(p_1+\ldots+p_{i-1})} \widetilde{P_r}(\Omega_1, \ldots, \mathrm{d}\Omega_i, \ldots, \Omega_r)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sia $A = \mathcal{A}$ e $\Omega_i = \mathcal{F}$ nelle (2.4) e (2.5) con $p = 1$ e $p_i = 2$. Aggiungendo un termine nullo della forma (2.4) alla (2.5) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\widetilde{P_r}(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F}) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} [\widetilde{P_r}(\mathcal{F},\ldots,\mathrm{d}\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F}) + \widetilde{P_r}(\mathcal{F},\ldots,[\mathcal{A},\ \mathcal{F}],\ldots,\mathcal{F})] = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{P_r}(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{D}\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F}) = 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

poichè $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A},\ \mathcal{F}] = 0$ (l'identità di Bianchi). Abbiamo quindi provato:

$$\mathrm{d}P_r(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathrm{P_r}}(\mathcal{F},\ldots,\mathcal{F}) = 0$$

(b) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due connessioni su E e siano $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ le rispettive forme di curvatura. Si definisca un potenziale interpolante $\mathcal{A}_t$ come:

$$\mathcal{A}_t := \mathcal{A} + t\theta, \qquad \theta := (\mathcal{A}' - \mathcal{A}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

in modo che $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'$. La corrispondente 2-forma di curvatura è:

$$\mathcal{F}_t := \mathrm{d}\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t = \mathcal{F} + t\mathcal{D}\theta + t^2\theta^2 \tag{2.7}$$

dove $\mathcal{D}\theta = \mathrm{d}\theta + [\mathcal{A},\ \theta] = \mathrm{d}\theta + \mathcal{A}\wedge\theta + \theta\wedge\mathcal{A}$. Notiamo per prima cosa che:

$$
\begin{aligned}
P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = P_r(\mathcal{F}_1) - P_r(\mathcal{F}_0) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_r(\mathcal{F}_t) = \\
&= r\int_0^1 \mathrm{d}t\widetilde{P_r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_t,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Dalla (2.7) troviamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_r(\mathcal{F}_t) &= r\widetilde{P_r}(\mathcal{D}\theta + 2t\theta^2,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) = \\
&= r\widetilde{P_r}(\mathcal{D}\theta,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) + 2rt\widetilde{P_r}(\theta^2,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

D'altra parte si ha:

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_t = \mathrm{d}\mathcal{F}_t + [\mathcal{A},\ \mathcal{F}_t] = -[\mathcal{A}_t,\ \mathcal{F}_t] + [\mathcal{A},\ \mathcal{F}_t] = t[\mathcal{F}_t,\ \theta] \tag{2.10}$$

dove si è fatto uso dell'identità di Bianchi $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t = \mathrm{d}\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}_t,\ \mathcal{F}_t] = 0$. Segue quindi che:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}[\widetilde{P_r}(\theta,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t)] = \\
&\quad = \widetilde{P_r}(\mathrm{d}\theta,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) - (r-1)\widetilde{P_r}(\theta,\ \mathrm{d}\mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) = \\
&\quad = \widetilde{P_r}(\mathcal{D}\theta,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) - (r-1)\widetilde{P_r}(\theta,\ \mathcal{D}\mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) = \\
&\quad = \widetilde{P_r}(\mathcal{D}\theta,\ \mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t) - (r-1)\widetilde{P_r}(\theta,\ [\mathcal{F}_t,\ \theta],\ldots,\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

dove è stato aggiunto uno 0 della forma (2.4) per trasformare d in $\mathcal{D}$. Se prendiamo $\Omega_1 = A = \theta$ e $\Omega_2 = \ldots = \Omega_m = \mathcal{F}_t$ nella (2.4) abbiamo:

$$2\widetilde{P_r}(\theta^2,\ \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\widetilde{P_r}(\theta,\ [\mathcal{F}_t,\ \theta], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) = 0$$

e da questa, unitamente alle (2.10), (2.11), otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_r(\mathcal{F}_t) = r\mathrm{d}[\widetilde{P_r}(\theta,\ \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)] = 0$$

Infine troviamo:

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = \mathrm{d}\left(r \int_0^1 \widetilde{P_r}(\mathcal{A}'.\mathcal{A},\ \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)\mathrm{d}t \right)$$

e questo mostra che $P_r(\mathcal{F}')$ differisce da $P_r(\mathcal{F})$ per una forma esatta. □

Nota 2.2.3 Sia M una varietà compatta e priva di bordo ed E un fibrato vettoriale su M; poichè, come appena mostrato, $P_r(\mathcal{F}')$ differisce da $P_r(\mathcal{F})$ per una forma esatta, l'integrale:

$$\int_M P(\mathcal{F})$$

non dipende dalla particolare connessione scelta, ma solo dal fibrato vettoriale E. In particolare un polinomio invariante $P(\mathcal{F})$, essendo chiuso e, in generale, non banale, definisce una classe di coomologia di M. Il teorema appena mostrato garantisce che tale classe sia indipendente dalla connessione scelta. La classe di coomologia così definita è detta *classe caratteristica* di E relativa al polinomio invariante P ed è indicata con $\chi_E(P)$.

Giacchè curvatura e connessione di un fibrato principale e dei suoi fibrati vettoriali associati sono legate dalla rappresentazione del gruppo strutturale in gioco, un polinomio invariante per $E(M, G)$ induce polinomi invarianti per tutti i suoi fibrati associati e il teorema di Chern-Weil si applica anche ad essi. △

Esempio 2.2.4 Senza alcuna pretesa di completezza, indichiamo di seguito alcuni esempi di classi caratteristiche il cui uso sarà necessario più avanti:

1. Sia E un fibrato vettoriale su M di fibra $\mathbb{C}^k$. La *classe totale di Chern* è definita da:

$$c(\mathcal{F}) := \det\left(1 + \frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)$$

Poichè $\mathcal{F}$ è una 2-forma, $c(\mathcal{F})$ è somma di forme di grado pari:

$$c(\mathcal{F}) := 1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots$$

dove $c_j(\mathcal{F}) \in \Omega^{2j}(M)$ è detta *j-esima classe di Chern*. Si ha $c_j(\mathcal{F}) = 0$ per $2j > m = \dim M$ o per $j > k = \mathrm{rk} E$. Si ha $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$.
Sia E la somma di Whitney di n line bundles complessi $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$. Si ha $c(E) = c(L_1) \wedge \ldots \wedge c(L_n)$ e, giacchè $c(L_i) = 1 + c_1(L_i) := 1 + x_i$, si ottiene:

$$c(E) = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \qquad \text{(prodotti esterni)}$$

Un risultato importante, noto come *splitting principle*, afferma che, anche se E non è direttamente scomponibile in somma di Whitney come sopra, è sempre possibile trovare n line bundles complessi tali che, a meno di un cambio di varietà di base, E sia loro somma diretta e valga perciò la formula scritta sopra.

2. Tra le classi caratteristiche, di particolare importanza risultano i cosiddetti *caratteri di Chern* (soprattutto a causa della loro comparsa nel teorema dell'indice di Atiyah-Singer).
Il *carattere di Chern totale* è definito come:

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) := \mathrm{tr}\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=1} \frac{1}{j!}\, \mathrm{tr} \left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j \tag{2.12}$$

Il *j-esimo carattere di Chern* è definito come:

$$\mathrm{ch}_j(\mathcal{F}) := \frac{1}{j!}\, \mathrm{tr} \left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j \tag{2.13}$$

Se $2j > m = \dim M$, $\mathrm{ch}_j(\mathcal{F})$ è nullo, perciò $\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ è un polinomio di ordine finito. Giacchè per un line bundle L si ha $\mathrm{ch}(L) = \mathrm{tr}\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \mathrm{e}^x = 1 + x$ con $x = \frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}$, lo splitting principle per $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$ dà:

$$\mathrm{ch}(E) = \prod_{j=1}^{k} \exp(x_j)$$

3. Un'altra utile classe caratteristica associata ad un fibrato complesso è la *classe di Todd*, definita da:

$$\mathrm{Td}(\mathcal{F}) = \prod_j \frac{x_j}{1 - \mathrm{e}^{-x_j}}$$

dove x_j sono come nello splitting principle. $\mathrm{Td}(\mathcal{F})$ può essere espresso in termini delle classi di Chern come:

$$\mathrm{Td}(\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{2} c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}[c_1(\mathcal{F})^2 + c_2(\mathcal{F})] + \dots$$

4. Sia E un fibrato vettoriale reale di rango k su M. La *classe totale di Pontrjagin* è definita da:
$$p(\mathcal{F}) := \det\left(1 + \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\right)$$
la cui espansione in termini delle *j-esime classi di Pontrjagin* è:
$$p(\mathcal{F}) = 1 + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + \ldots$$
e vale la relazione con le classi di Chern $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E^{\mathbb{C}})$, dove $E^{\mathbb{C}} = E \otimes \mathbb{C}$.

5. Sia M una varietà riemanniana $2l$-dimensionale orientabile di curvatura $\mathcal{R}$. La *classe di Eulero* di M è definita da:
$$e(M) := e(\mathcal{R})$$
dove $e(A)$ con $A \in \mathrm{M}_{2l\times 2l}$ è definita come la radice quadrata di $p_l(A)$:
$$e(A)e(A) = p_l(A)$$
Si noti che è necessario determinare la forma di e su una matrice A generica poichè $p_l(\mathcal{R}) = 0$.
Lo splitting principle applicato al fibrato tangente complessificato $\mathrm{T}M^{\mathbb{C}}$, considerato anche il legame con le classi di Pontrjagin e quindi con le classi di Chern, dà:
$$\begin{aligned} e(\mathrm{T}M) &= \prod_{j=1}^{m/2} x_i(\mathrm{T}M^{\mathbb{C}}) \qquad && \text{se } m \text{ è pari} \\ e(\mathrm{T}M) &= 0 && \text{se } m \text{ è dispari} \end{aligned}$$

6. Sia E un fibrato vettoriale reale di rango k su M.
L'*L-polinomio di Hirzebruch* è definito come:
$$L(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\tanh(x_j)}$$
Esso si scrive in termini delle classi di Pontrjagin come:
$$L(\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{45}(-p_1^2 + 7p_2) + \frac{1}{945}(2p_1^3 - 13p_1p_2 + 62p_3) + \ldots$$
L'*$\hat{A}$-genere* (o *Dirac-genere*) è definito come:
$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)}$$
Esso si scrive in termini delle classi di Pontrjagin come:
$$\hat{A}(\mathcal{F}) = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \frac{1}{967680}(-31p_1^3 + 44p_1p_2 - 16p_3) + \ldots$$

△

2.2.2 Teoria dell'indice

Operatori ellittici

Nel seguito considereremo operatori differenziali definiti su fibrati vettoriali sopra una varietà M compatta e priva di bordo. Siano E ed F fibrati vettoriali complessi su M. Un operatore differenziale D è una mappa $\mathbb{C}$-lineare $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$. Presa una carta locale (U, x^μ), introduciamo la seguente notazione multi-indice:

$$\begin{aligned} M &:= (\mu_1, \ldots, \mu_m) \qquad \mu_j \in \mathbb{Z},\ \mu_j \geq 1 \\ |M| &:= \mu_1 + \ldots + \mu_m \\ D_M = \frac{\partial^{|M|}}{\partial x^M} &:= \frac{\partial^{\mu_1+\ldots+\mu_m}}{\partial (x^1)^{\mu_1} \ldots \partial (x^m)^{\mu_m}} \end{aligned}$$

Se rk $E = k$ e rk $F = k'$, la forma più generale per D è:

$$[Ds(x)]^\alpha = \sum_{\substack{|M| \leq N \\ 1 \leq a \leq k}} (A^M)^\alpha_a(x) D_M s^a(x) \qquad 1 \leq \alpha \leq k'$$

dove s è una sezione di E. L'intero positivo N è detto *ordine* di D. Il simbolo di D è la matrice $k \times k'$:

$$\sigma(D, \xi) := \sum_{|M| \leq N} (A^M)^\alpha_a(x) \xi_M$$

dove ξ è una m-upla reale. Il simbolo può anche essere definito indipendentemente dalle coordinate. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale reale, sia $p \in M$, $\xi \in \mathrm{T}^*_p M$ e $s \in \pi^{-1}(p)$. Si prenda una sezione $\tilde{s} \in \Gamma(E)$ tale che $\tilde{s}(p) = s$ e una funzione $f \in \mathfrak{F}(M)$ tale che $f(p) = 0$ e $\mathrm{d}f(p) = \xi$. Allora il simbolo di D può essere espresso come:

$$\sigma(D, \xi)s = \frac{1}{N!} D(f^N \tilde{s})_{|p}$$

perciò $\sigma(D, \xi)\colon E_p \to F_p$ se $\xi \in \mathrm{T}^*_p M$.

Definizione 2.2.5 *Un operatore differenziale $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ si dice ellittico se il suo simbolo $\sigma(D, \xi)$ è invertibile per ogni $x \in M$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

Operatori di Fredholm e indice

Siano H ed H' spazi di Hilbert complessi separabili, e sia $\mathsf{B}(H,\ H')$ l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati $T\colon H \to H'$ con la norma $\|T\| := \sup\{|Tu| :\ |u| \leq 1\} < \infty$.

Definizione 2.2.6 *Un operatore $T \in \mathsf{B}(H, H')$ è detto operatore di Fredholm se:*

$$\ker T := \{u \in H : \; Tu = 0\} \quad e \quad \operatorname{coker} T := H'/\operatorname{im}(T)$$

sono finito-dimensionali. Indichiamo con $\mathsf{F}(H, H')$ l'insieme degli operatori di Fredholm da H ad H'. Definiamo indice dell'operatore di Fredholm T l'intero:

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \tag{2.14}$$

Presentiamo di seguito alcuni semplici risultati riguardanti gli operatori di Fredholm che verranno utilizzati più avanti. La dimostrazione è quasi sempre banale e, qualora così non fosse, una buona referenza è [9]. Inoltre restringeremo momentaneamente l'attenzione a operatori di Fredholm da H in $H' = H$, poichè il caso più generale non necessita di argomenti nuovi e, soltanto, complica la notazione.

Nota 2.2.7 Per due operatori di Fredholm $F\colon H \to H$ e $G\colon H' \to H'$, la somma diretta:

$$F \oplus G\colon H \oplus H' \to H \oplus H'$$

è ancora un operatore di Fredholm e:

$$\operatorname{ind}\,(F \oplus G) = \operatorname{ind} F + \operatorname{ind} G$$

△

Nota 2.2.8 La composizione $G \cdot F$ di due operatori di Fredholm $F\colon H \to H'$ e $G\colon H' \to H''$ è ancora un operatore di Fredholm. △

Nota 2.2.9 Il seguente risultato è noto come *Snake Lemma.* Si assuma che il seguente diagramma di spazi vettoriali e mappe lineari, con sequenze esatte verticali e operatori di Fredholm per mappe orizzontali, sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & H_2 \arrow[d, "j"] \\
H_1' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "p"'] & H_2' \arrow[d, "q"] \\
H_1'' \arrow[r, "F''"] \arrow[d] & H_2'' \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Allora si ha:

$$\text{ind } F - \text{ind } F' + \text{ind } F'' = 0$$

$\triangle$

Nota 2.2.10 Direttamente dai risultati delle due note precedenti segue che, per due operatori di Fredholm $F\colon H \to H'$ e $G\colon H' \to H''$, si ha:

$$\text{ind } G \cdot F = \text{ind } F + \text{ind } G$$

$\triangle$

Nota 2.2.11 In quanto operatore limitato ($\Leftrightarrow$ continuo) tra spazi di Hilbert, ogni operatore di Fredholm $T\colon H \to H'$ possiede un (unico) aggiunto $T^*\colon H' \to H$ tale che, per ogni $x \in H$ e $y \in H'$:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

e:

$$\|T\| = \|T^*\|$$

E' semplice mostrare che in generale esiste un isomorfismo:

$$\text{coker } T \simeq \text{ker } T^*$$

Il risultato segue immediatamente da ker $T^* = (\text{im } T)^\perp \simeq$ coker T, dove l'isomorfismo è banalmente $x \mapsto [x]$ la cui iniettività è evidente e la cui surgettività è garantita dal teorema che asserisce che, scelto un sottospazio completo Y di uno spazio di Hilbert X, per ogni $x \in X$ esiste unico $\hat{y} \in Y$ tale che $(x - \hat{y}) \perp Y$. $\triangle$

Il seguente risultato è di fondamentale importanza per il seguito.

Teorema 2.2.12 *La mappa* ind: $\mathsf{F} \to \mathbb{Z}$ *è localmente costante.*

Prova: Siano $e_0, e_1, \ldots$ una base ortonormale per lo spazio di Hilbert H. Consideriamo H_n come la chiusura dello spazio generato dagli e_i con $i \geq n$, e sia P_n la proiezione ortogonale di H su H_n. Chiaramente P_n è autoaggiunto e $P_n \in \mathsf{F}$, poichè ker P_n e coker P_n sono finito-dimensionali. Perciò ind $P_n = 0$ e, per ogni $F \in \mathsf{F}$, si ha:

$$\text{ind } P_n F = \text{ind } F$$

Poichè dim coker $F < \infty$, possiamo trovare n_0 tale che $e_0, \ldots, e_{n_0 - 1}$ e $F(H)$ generino H; in particolare:

$$P_n F(H) = H_n \qquad \text{e} \qquad \text{dim coker } P_n F = n$$

per tutti gli $n \geq n_0$. Sebbene la funzione dim ker sia solo semi-continua su F, possiamo mostrare che:

$$\text{dim ker } P_n G = \text{dim ker } P_n F \quad \text{e} \quad \text{dim coker } P_n G = \text{dim coker } P_n F$$

per G sufficientemente vicina ad F e n sufficientemente grande. Infatti, per $G \in \mathsf{B}$, si consideri l'operatore:

$$\begin{array}{rcl} \hat{G}\colon\ H & \to & H_n \oplus \text{ker } P_n F \\ u & \mapsto & (P_n G u, pu) \end{array}$$

dove $p\colon H \to \text{ker } P_n F$ è la proiezione. $\hat{F}$ è bigettiva (per quanto notato prima), e perciò ha inverso limitato. Se si identifica H con $H_n \oplus \text{ker } P_n F$ (possibile sempre per quanto notato prima) si deduce che $\hat{F}$appartiene al sottoinsieme $\mathsf{B}^\times$ degli invertibili di B. Tale sottoinsieme è aperto (questo è vero per qualunque algebra di Banach), perciò esiste un intorno di F in cui gli operatori hanno queste stesse proprietà. Infine, data la continuità dell'operatore $\hat{\cdot}$, esiste un intorno U di F in cui $\hat{G}$ è un isomorfismo per tutti i $G \in \mathsf{U}$. Dalla surgettività di $\hat{G}$ segue che $P_n G(H) = H_n$ da cui dim coker $P_n G =$ dim coker $P_n F = n$. Inoltre ker $P_n G = \hat{G}^{-1}(\text{ker } P_n F)$, poichè, per definizione di $\hat{G}$, un punto u è mappato in ker $P_n F$ da $\hat{G}$ esattamente quando $P_n G u$ è nullo. Giacchè $\hat{G}$ è un isomorfismo, abbiamo anche:

$$\text{dim ker } P_n G = \text{dim ker } P_n F$$

che mostra l'affermazione di cui sopra.
Abbiamo perciò mostrato che per ogni $F \in \mathsf{F}$ esiste un numero naturale n e un $\eta > 0$ tali che, per ogni $G \in \mathsf{B}$ con $\|F - G\| < \eta$, si ha:

$$\text{ind } F = \text{ind } P_n F = \text{ind } P_n G = \text{ind } G$$

□

Complessi ellittici di Fredholm

Definizione 2.2.13 *Consideriamo la sequenza di operatori di Fredholm:*

$$\ldots \to \Gamma(E_{i-1}) \xrightarrow{D_{i-1}} \Gamma(E_i) \xrightarrow{D_i} \Gamma(E_{i+1}) \xrightarrow{D_{i+1}} \ldots \tag{2.15}$$

dove $\{E_i\}$ è una sequenza di fibrati vettoriali su una varietà compatta M. Tale sequenza si dice complesso ellittico se D_i è nilpotente ($D_i D_{i-1} = 0$) per ogni i e la sequenza indotta:

$$\ldots \to E_{i-1} \xrightarrow{\sigma(D_{i-1},\xi)} E_i \xrightarrow{\sigma(D_i,\xi)} E_{i+1} \xrightarrow{\sigma(D_{i+1},\xi)} \ldots$$

è esatta per ogni $\xi \in \Gamma(\mathrm{T}^*M)$ ovunque non nullo.

Indicando l'aggiunto di D_i con D_i^*, si definisce il *laplaciano* $\Delta_i \colon \Gamma(E_{i+1}) \to \Gamma(E_i)$ come:

$$\Delta_i := D_{i-1}D_{i-1}^* + D_i^* D_i$$

Similmente a quanto accade per le forme differenziali su M, si ha per le sezioni s_i di E_i l'analogo della nota decomposizione di Hodge:

$$s_i = D_{i-1}s_{i-1} + D_i^* s_{i+1} + h_i$$

dove $s_{i\pm1} \in \Gamma(E_{i\pm1})$ e $h_i \in \mathrm{Harm}^i(E, D) := \ker \Delta_i$.
Se si indicano i gruppi di coomologia del complesso di cui sopra con $H^i(E, D)$, si dimostra che, come nel caso della coomologia di de Rham, si ha:

$$H^i(E, D) \simeq \mathrm{Harm}^i(E, D)$$

Definizione 2.2.14 *Dato un complesso ellittico come il (2.15), si dice indice del complesso il numero intero:*

$$\mathrm{ind}\ (E, D) := \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim\, H^i(E, D) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim\, \mathrm{Harm}^i(E, D)$$

Questa definizione di indice è legata a quella dell'indice di un operatore di Fredholm $D \colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ nel seguente modo. Possiamo formalmente aggiungere uno zero ad entrambi i lati ottenendo un complesso ellittico della forma:

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D} \Gamma(E_2) \xrightarrow{\phi} 0$$

dove i è l'inclusione e ϕ manda nello 0 l'intero spazio $\Gamma(E_2)$. L'indice di tale complesso coincide con l'indice dell'operatore di Fredholm D; infatti:

$$\mathrm{ind}\ (E, D) = \dim \ker D - [\dim \Gamma(E_2) - \dim \mathrm{im}\ D] = \dim \ker D - \dim \mathrm{coker}\ D = \mathrm{ind}\ D$$

dove abbiamo notato che $\dim \mathrm{im}\ i = 0$, $\ker \phi = \Gamma(E_2)$ e $\mathrm{coker}\ D = \ker \phi/\mathrm{im}\ D$.

Dato un complesso ellittico come il (2.15), è spesso conveniente lavorare con un complesso equivalente di soli due termini. Questo *rolling up* è effettuato definendo:

$$E_+ := \bigoplus_r E_{2r} \quad , \quad E_- := \bigoplus_r E_{2r+1}$$

chiamati rispettivamente fibrato pari e fibrato dispari. Corrispondentemente consideriamo gli operatori:

$$A := \bigoplus_r (D_{2r}) + D_{2r-1}^* \quad , \quad A^* := \bigoplus_r (D_{2r+1} + D_{2r}^*)$$

e notiamo che $A\colon \Gamma(E_+) \to \Gamma(E_-)$ e $A^*\colon \Gamma(E_-) \to \Gamma(E_+)$. Da A e A^* costruiamo i due laplaciani:

$$\begin{aligned}\Delta_+ &:= A^*A = \bigoplus_r \Delta_{2r} \\ \Delta_- &:= AA^* = \bigoplus_r \Delta_{2r+1}\end{aligned}$$

Allora si ha:

$$\text{ind } (E_\pm, A) = \text{dim ker } \Delta_+ - \text{dim ker } \Delta_- = \sum_r (-1)^r \text{dim ker } \Delta_r = \text{ind } (E, D)$$

Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer

Enunceremo ora il celebrato *teorema dell'indice di Atiyah-Singer*, un risultato di importanza capitale per la topologia algebrica poichè, come vedremo, lega una quantità analitica come l'indice all'integrale di certe classi caratteristiche (invarianti topologici). La prova è molto complicata e può essere trovata, ad esempio, in [35].

Teorema 2.2.15 (Atiyah-Singer) *Sia (E, D) un complesso ellittico su una varietà m-dimensionale compatta e priva di bordo. L'indice di tale complesso è dato da:*

$$\text{ind } (E, D) = (-1)^{m(m+1)/2} \int_M \text{ch } \left(\bigoplus_r (-1)^r E_r \right) \frac{\text{Td}(\text{T}M^{\mathbb{C}})}{e(\text{T}M)} \bigg|_{\text{vol}} \tag{2.16}$$

Nell'integrando del termine di destra, solo le m-forme sono considerate contribuire, in modo che l'integrazione abbia senso. Se m è dispari ind $(E, D) = 0$ a priori.
Una diretta conseguenza del teorema di Atiyah-Singer è il seguente:

Corollario 2.2.16 *Sia $\Gamma(E) \xrightarrow{D} \Gamma(F)$ un complesso ellittico a due termini. L'indice di D è dato da:*

$$\begin{aligned}\text{ind } D &= \text{dim ker } D - \text{dim ker } D^* \\ &= (-1)^{m(m+1)/2} \int_M (\text{ch } E - \text{ch } F) \frac{\text{Td}(\text{T}M^{\mathbb{C}})}{e(\text{T}M)} \bigg|_{\text{vol}}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Esempio 2.2.17 Nel caso del complesso di de Rham $(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d})$ su una varietà $(m = 2l)$-dimensionale, il teorema di Atiyah-Singer si riduce al *teorema di Gauss-Bonnet*:

$$\chi(M) = \int_M e(\text{T}M)$$

dove $\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i(M)$ è la *caratteristica di Eulero* e i $b_i :=$ dim $H_i(M, \mathbb{R}) =$ dim $H^i(M)$ sono i *numeri di Betti*, cioè le dimensioni dei gruppi di omologia (singolare o simpliciale) o di coomologia della varietà. △

Esempio 2.2.18 Nel caso del complesso di Dolbeault $(\Omega^{0,\bullet}(M), \overline{\partial})$ su una varietà complessa M di dimensione complessa m, il teorema di Atiyah-Singer si riduce a:

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^m b^{0,i} = \int_M \mathrm{Td}(\mathrm{T}M^+)$$

dove $b^{0,i} := \dim_{\mathbb{C}} H^{0,i}(M)$ e $\mathrm{T}_pM^{\pm} = \{Z \in \mathrm{T}_pM^{\mathbb{C}} | J_pZ = \pm \mathrm{i}Z\}$.
Se si considera invece un complesso si Dolbeault $(\Omega^{0,\bullet} \otimes V, \overline{\partial}_V)$ twistato per un fibrato vettoriale olomorfo V sopra M, il teorema di Atiyah-Singer si riduce al *teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch*:

$$\mathrm{ind}\ \overline{\partial}_V = \int_M \mathrm{Td}(\mathrm{T}M^+)\mathrm{ch}(V)$$

△

Esempio 2.2.19 Sia M una varietà differenziabile di dimensione pari $M = 2l$. Se $l = 2k$ è pari, si noti che la dualità di Hodge * soddisfa $^{*2} = 1$ quando agisce su una $2k$-forma. Inoltre $H^{2k}(M) \simeq \mathrm{Harm}^{2k}(M)$ poichè ogni classe di equivalenza in $H^{2k}(M)$ ha un unico rappresentativo armonico. In tal modo si ha la scomposizione in autospazi dell'operatore *:

$$\mathrm{Harm}^{2k}(M) = \mathrm{Harm}^{2k}_{+}(M) \oplus \mathrm{Harm}^{2k}_{-}(M)$$

Si definisce *segnatura di Hirzebruch* della varietà $(m = 2l)$-dimensionale M l'intero:

$$\begin{aligned} &\tau(M) := \dim \mathrm{Harm}^{2k}_{+}(M) - \dim \mathrm{Harm}^{2k}_{-}(M) && \text{se } l = 2k \text{ è pari} \\ &\tau(M) := 0 && \text{se } l \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Se ora consideriamo l'operatore $\pi \colon \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{m-r}(M)^{\mathbb{C}}$ definito come $\pi := \mathrm{i}^{r(r-1)+l}\ {}^*$, notiamo subito che esso è un radice di 1 e, secondo i suoi autospazi, si ha la scomposizione $\Omega^{\bullet}(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^+(M) \oplus \Omega^-(M)$. Consideriamo poi la restrizione $\mathfrak{D}_{\pm}$ allo spazio $\Omega^{\pm}(M)$ dell'operatore $\mathfrak{D} := \mathrm{d} + \mathrm{d}^*$. Poichè $\mathfrak{D}$ anticommuta manifestamente con π, è possibile considerare il complesso ellittico:

$$\mathfrak{D}_+ \colon \Omega^+(M) \to \Omega^-(M)$$

in cui, tra l'altro, $\mathfrak{D}_- = \mathfrak{D}_+^*$. Si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\ \mathfrak{D}_+ &= \dim \ker \mathfrak{D}_+ - \dim \ker \mathfrak{D}_- \\ &= \dim \mathrm{Harm}^{2k}_{+}(M) - \dim \mathrm{Harm}^{2k}_{-}(M) = \tau(M) \end{aligned}$$

dove si è notato che solo i contributi delle $(l = 2k)$-forme armoniche non si cancellano e che $\ker^{2k} \mathfrak{D}_{\pm} = \mathrm{Harm}^{2k}_{\pm}(M)$ (poichè $\pi = {}^*$ in $\mathrm{Harm}^{2k}(M)$).

Se si considera il complesso $\mathfrak{D}_+ \colon \Omega^+(M) \to \Omega^-(M)$, il teorema di Atiyah-Singer si riduce al *teorema di segnatura di Hirzebruch*:

$$\tau(M) = \int_M L(\mathrm{T}M)|_{\mathrm{vol}}$$

$\triangle$

Esempio 2.2.20 L'esempio di complesso ellittico più importante ai fini delle applicazioni in teoria dei campi è costituito dal *complesso di spin*. Esso descrive campi di Dirac interagenti con potenziali di gauge. Nel trattare questo esempio considereremo nota la geometria delle algebre di Clifford e la nozione di struttura di spin su una varietà (per cui si può consultare [35]).
In particolare si ricordi che, data una varietà riemanniana orientata M (con metrica g) di dimensione pari $m = 2l$ e detto E l'$SO(m)$-fibrato principale dei riferimenti ortonormali orientati per il fibrato tangente, si dice *struttura di spin* su M uno $\mathrm{Spin}(m)$-fibrato principale $\tilde{E}$ su M con un doppio ricoprimento di $\tilde{E} \to E$ che coincida, fibra a fibra, con il morfismo di doppio ricoprimento $\mathrm{Spin}(m) \to SO(m)$. Inoltre, si dice *fibrato di spin* (o, più comunemente *spin bundle*) $S(M)$ della varietà M il fibrato vettoriale associato ad $\tilde{E}$ tramite la *rappresentazione di spin*, cioè l'unica rappresentazione irriducibile, di dimensione 2^l, dell'algebra di Clifford $\mathrm{Cl}(m)$, la quale, come noto, si scompone in somma diretta $S(M) = S_+(M) \oplus S_-(M)$ di due rappresentazioni irriducibili a chiralità definita per $\mathrm{Spin}(m) \subset \mathrm{Cl}(m)$. Si noti che, grazie alla rappresentazione di spin, l'intero fibrato di algebre di Clifford $\mathrm{Cl}(\mathrm{T}M)$ (e non solo il suo sottofibrato $\tilde{E}$) agisce a sinistra su $S(M)$. In particolare $S(M)$ è un modulo sinistro su $\mathrm{Cl}(\mathrm{T}M) \otimes \mathbb{C}$ (cioè è un *fibrato di Clifford*) e $\mathrm{T}M \otimes \mathbb{C} \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{T}M) \otimes \mathbb{C} \Rightarrow \mathrm{T}M \otimes \mathbb{C} \subset S_+ \otimes S_-$.
In quanto Clifford bundle, lo spin bundle, con la sua metrica hermitiana e connessione di spin, possiede il proprio operatore di Dirac, cioè un operatore differenziale di primo ordine su $\Gamma(S(M))$ definito come la composizione:

$$D \colon \Gamma(S(M)) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathrm{T}^*M \otimes S(M)) \xrightarrow{g} \Gamma(\mathrm{T}M \otimes S(M)) \xrightarrow{c} \Gamma(S(M)) \tag{2.18}$$

dove c indica l'azione di Clifford di $\Gamma(\mathrm{T}M)$ su $\Gamma(S(M))$ che si realizza, in questo caso, attraverso la rappresentazione di spin. La forma esplicita di tale operatore è:

$$Ds = \sum_i c(\hat{e}_i)\hat{\nabla}_i s$$

dove $(\hat{e_1}, \ldots, \hat{e_m})$ è una base anolonoma ortonormale per $\Gamma(\mathrm{T}M)$ e $(\hat{\theta^1}, \ldots, \hat{\theta^n})$ la sua duale con $e_i^{\ j} \frac{\partial}{\partial x^j} = \hat{e}_i$ e $e^i_{\ j} \mathrm{d}x^j = \hat{\theta}^i$ ($e^i_{\ j}$ inversa di $e_i^{\ j}$) così che, seguendo la composizione

(2.18), si ha:

$$D\colon s \mapsto \nabla_j s \otimes \mathrm{d}x^j = \nabla_j s \otimes \hat{\theta}^i e_i^{\ j} \mapsto \sum_i \nabla_j s \otimes \hat{e}_i e_i^{\ j} \mapsto$$
$$\mapsto \sum_i c(\hat{e}_i)(e_i^{\ j} \nabla_j s) := \sum_i c(\hat{e}_i)(\hat{\nabla}_i s)$$

Ad esempio, nel caso, rilevante per il seguito, in cui $M = S^4$ $(m = 4)$ con metrica euclidea, l'operatore di Dirac assume la forma $D\psi = \mathrm{i}\gamma^\mu \hat{\nabla}_\mu \psi$.

Poichè l'azione degli elementi dispari di $\mathrm{Cl}(\mathrm{T}M)$ su $\Gamma(S(M))$ inverte la chiralità, e a causa della contrazione di Clifford nella sua definizione, l'operatore D genera il complesso ellittico a due termini:

$$\Gamma(S_+(M)) \quad \underset{D^*=D}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \quad \Gamma(S_-(M))$$

Posto ind $D = \dim\ker D - \dim\ker D^* = \nu_+ - \nu_-$, dove ν_+ (ν_-) è il numero di zero-modi con chiralità $+$ $(-)$, il teorema di Atiyah-Singer per questo complesso assume la forma:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \hat{A}(\mathrm{T}M)\Big|_{\mathrm{vol}}$$

In teoria dei campi si incontrano spesso campi spinoriali che appartengono rappresentazioni di un gruppo G. Tali campi sono descritti da sezioni dello spin bundle twistato per il fibrato vettoriale E associato a $P(M,G)$ tramite la rappresentazione in gioco, ovvero $S(M) \otimes E$.
In tal caso l'operatore di Dirac assume la forma:

$$D_E s = \sum_i c(\hat{e}_i)\tilde{\hat{\nabla}}_i s$$

dove $\widetilde{\nabla}_i$ è la connessione twistata $\partial_i + \omega_i + \mathcal{A}_i$ in cui compaiono la connessione di spin ω e la connessione di gauge $\mathcal{A}_i$.
In questo caso il teorema di Atiyah-Singer si scrive:

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \hat{A}(\mathrm{T}M)\mathrm{ch}(E)\Big|_{\mathrm{vol}}$$

$\triangle$

Il fibrato indice

In questa sezione ci occuperemo della costruzione del cosiddetto fibrato indice.
A tal fine presentiamo dapprima il concetto di K-teoria. In generale, dato un semigruppo

G (additivo) esso può essere reso gruppo nel seguente modo: si consideri il prodotto cartesiano $G \times G$ e, in esso, la relazione di equivalenza $(g, g') \sim (f, f') \Leftrightarrow g + f' = g' + f$. Si ponga poi $\hat{G} := G \times G/\sim$ e si indichi con $g - f$ la coppia (g, f); $\hat{G}$ è un gruppo che contiene il semigruppo G attraverso il morfismo di gruppi $G \to \hat{G}$ dato da $g \mapsto (g, 0)$. Tale procedimento può essere applicato al caso particolare del semigruppo abeliano $\mathrm{Vect}(X)$ delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali sulla varietà X con l'operazione data dalla somma diretta $\oplus$. Il gruppo abeliano ottenuto, indicato con $K(X) := \mathrm{Vect}(X) \times \mathrm{Vect}(X)/\sim$, è detto gruppo di K-teoria della varietà X.

Euristicamente, l'idea del fibrato indice è quella di associare ad un famiglia $T : X \to \mathsf{F}$ di operatori di Fredholm, parametrizzati da una varietà X, un fibrato su X della forma $[\ker T] - [\mathrm{coker}\ T] \in K(X)$. In generale, come vedremo, questo può essere fatto definendo separatamente fibrati $[\ker T]$ e $[\mathrm{coker}\ T]$ solo nell'ipotesi che la famiglia T abbia dimensione del kernel costante, tuttavia una definizione appena più generale del fibrato indice è adottabile in maniera canonica.

Lemma 2.2.21 *Per ogni famiglia continua $T\colon X \to \mathsf{F}$ di operatori di Fredholm da H ad H, con dimensione del kernel costante, si possono assegnare in maniera naturale fibrati vettoriali $\ker T$ e $\mathrm{coker}\ T \simeq \ker T^*$ sopra X.*

Prova: Mostreremo il teorema solo nel caso di $\ker T$. Il caso di $\ker T^*$ è del tutto simile. Sia $\ker T := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \ker T_x$ con la topologia ereditata quale sottoinsieme di $X \times H$. Poichè $\dim \ker T_x = \dim \ker T_{x'}$, la proiezione ortogonale $P\colon H \to \ker T_x$, quando ristretta a $\ker T_{x'}$ per x' sufficientemente vicino a x, è un isomorfismo $\ker T_{x'} \simeq \ker T_x$; questo, unitamente alla definizione, dà la proprietà di banalità locale e chiude la dimostrazione. □

La costruzione eseguita in precedenza permette, nelle ipotesi del lemma precedente, di costruire, a partire dai fibrati $\ker T$ e $\mathrm{coker}\ T \simeq \ker T^*$, il fibrato indice $\ker T - \mathrm{coker} T$. Inoltre, grazie al seguente teorema, la restrittiva ipotesi di costanza della dimensione del kernel potrà essere rimossa.

Teorema 2.2.22 *Per ogni famiglia continua $T\colon X \to \mathsf{F}$ di operatori di Fredholm in uno spazio di Hilbert H, con X compatta, è assegnato in maniera canonica un fibrato indice $\mathrm{ind}\ T \in K(X)$.*

Prova: Si scelga un base ortonormale $e_0, e_1, \ldots$ per H e si consideri l'operatore di Fredholm $P_n T_x$ (che ha lo stesso indice di T_x), dove, al solito, P_n è la proiezione di H sul sottospazio generato da $e_n, e_{n+1}, \ldots$. Poichè X è compatta, si può trovare n tale

che im $(P_nT_x) = H_n$ per tutti gli $x \in X$, da cui dim ker $P_nT_x =$ dim ker $P_nT_{x'}$ per tutti gli $x, x' \in X$ (in particolare si mostra dapprima che, per ogni $y \in X$ esiste un intorno U_y di y tale che l'affermazione è valida per $x, x' \in U_y$, poi si passa ad un ricoprimento di X finito $\{U_y : \ y \in Y\}$ con Y sottoinsieme finito di X e si prende $n := \max\{n_y : \ y \in Y\}$.
Relativamente alla famiglia P_nT, grazie al lemma precedente, possiamo scrivere:

$$\text{ind } T := \text{ind } P_nT = [\ker P_nT] - [\text{coker } P_nT] = [\ker P_nT] - [X \times H_n^{\perp}]$$

Non è difficile mostrare che il fibrato così ottenuto non dipende da n, nè dalla base $e_0, e_1, \ldots$. □

Il teorema dell'indice per famiglie di operatori di Dirac

Consideriamo ora una generalizzazione del teorema dell'indice per complessi di spin. Restringeremo l'attenzione al caso, utile nella futura applicazione, di una famiglia di operatori di Dirac twistati $D\colon X \to \mathsf{F}$ con $D_x\colon \Gamma(S_{\pm}(M) \otimes E(x)) \to \Gamma(S_{\mp}(M) \otimes E(x))$, dove $E\colon X \to \text{Vect(M)}$ è una famiglia di fibrati vettoriali su M parametrizzata da X. Notiamo subito che non siamo nelle condizioni adatte alla costruzione del fibrato indice della famiglia $D\colon X \to \mathsf{F}$, poichè lo spazio su cui agisce D_x dipende da $x \in X$. Tuttavia è possibile considerare un nuovo fibrato $\overline{E} \to M \times X$ con connessione $\overline{\nabla}$ tale che, per ogni $x \in X$, $\overline{E}\big|_{M\times\{x\}} \simeq E(x)$ e $\overline{\nabla}\big|_{M\times\{x\}} = \nabla_x$ (la connessione in $E(x)$). In tal modo si può pensare che l'operatore D_x agisca, per tutti gli $x \in X$, sulle sezioni dello stesso fibrato $S_{\pm}(M) \otimes \overline{E}$.
Ha ora perfettamente senso costruire il fibrato indice ind D. Enunciamo così la seguente generalizzazione del teorema dell'indice:

Teorema 2.2.23 *Nelle ipotesi precedenti, sia $p\colon M \times X \to M$ la proiezione canonica; allora vale la formula:*

$$\text{ch}(\text{ind } D) = \int_M p^*(\hat{A}(M))\text{ch}(E)$$

dove il carattere di Chern di un elemento della K-teoria di X rappresentato dalla coppia $[F, G]$ è definito come $\text{ch}([F, G]) := \text{ch}(F) - \text{ch}(G)$.

2.3 Il calcolo istantonico

2.3.1 L'approssimazione semiclassica

Gli integrali di cammino sono ben definiti solo nello spazio euclideo, perciò passeremo, d'ora in poi, a considerare la metrica di $\mathbb{R}^4$ con segnatura $(+ + ++)$. Dato un sistema quantomeccanico relativistico descritto dall'azione $\mathcal{S}[\mathcal{B},\ \mathcal{F}]$, dove si sono globalmente indicati con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$ i campi bosonici e fermionici, una delle quantità fondamentali per la previsione del comportamento fisico del sistema è la funzione di partizione (o ampiezza vuoto-vuoto):

$$Z = \langle 0|0\rangle = \int [\mathcal{D}\mathcal{B}]\ [\mathcal{D}\mathcal{F}]\ \mathrm{e}^{-\mathcal{S}[\mathcal{B},\ \mathcal{F}]} \tag{2.19}$$

dove si sottintende che contribuiscono all'integrale funzionale soltanto le configurazioni di campo ad azione finita.
Da essa è possibile calcolare le funzioni di Green e quindi gli elementi di matrice S per i processi di scattering, che costituiscono gli oggetti delle misure negli acceleratori.

Uno dei punti fondamentali riguardanti questa formulazione in termini di path integral, nonchè il nucleo della cosiddetta *approssimazione semiclassica*, risiede nel notare che le configurazioni di campi che più contribuiscono alla funzione di partizione (e perciò alla dinamica) sono quelle in cui l'azione è minima, cioè le configurazioni classiche, o zero-modi, che soddisfano alle equazioni del moto. E' perciò una buona approssimazione il calcolo dell'integrale in (2.19) ristretto alle configurazioni di minimo locale dell'azione ed alle fluttuazioni (non-zero-modi) attorno ad esse. In formule:

$$Z \simeq \int [\mathcal{D}\mathcal{B}^{\rm cl}]\ [\mathcal{D}\mathcal{F}^{\rm cl}]\ \int [\mathcal{D}\delta\mathcal{B}]\ [\mathcal{D}\delta\mathcal{F}]\ \mathrm{e}^{-\mathcal{S}[\mathcal{B}^{\rm cl}+\delta\mathcal{B},\ \mathcal{F}^{\rm cl}+\delta\mathcal{F}]} \tag{2.20}$$

2.3.2 Geometria dei campi di Yang-Mills

Nell'assegnare un preciso setting geometrico alla teoria fisica di cui ci si vuole occupare, inizieremo dagli aspetti più classici delle teorie di gauge (nell'esposizione seguiremo [32]). Un potenziale di gauge può essere riguardato come un'espressione locale per la connessione in un fibrato principale. Noi considereremo fibrati principali su $\mathbb{R}^4$ con gruppo strutturale $SU(N)$, e li denoteremo con $P(\mathbb{R}^4,\ SU(N))$. I potenziali di gauge relativi ad un tale fibrato sono detti di Yang-Mills, dai nomi di coloro che per primi li studiarono.

Poichè $P(\mathbb{R}^4,\ SU(N))$ è un fibrato banale, cioè $P(\mathbb{R}^4,\ SU(N)) \simeq \mathbb{R}^4 \times SU(N)$, è sufficiente un singolo potenziale di gauge per descrivere l'intera connessione:

$$\mathcal{A} = A_\mu{}^\alpha T_\alpha \mathrm{d}x^\mu \tag{2.21}$$

dove i T_α generano l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(N)$. Il tensore dei campi, cioè la curvatura, è dato da:

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{2.22}$$

dove:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu,\ \mathcal{A}_\nu] \tag{2.23}$$

L'identità di Bianchi è:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A},\ \mathcal{F}] = 0 \tag{2.24}$$

L'azione di Yang-Mills per tali campi è:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{YM}}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})\ \mathrm{d}^4x = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge\ {}^*\mathcal{F}) \tag{2.25}$$

Il principio di minima azione rispetto a variazioni di $\mathcal{A}_\mu$ impone:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{D}\ {}^*\mathcal{F} = 0 \tag{2.26}$$

L'interazione del suddetto campo di gauge (bosonico) con i fermioni viene descritta come segue. Sia ψ un multipletto di campi di Dirac, considerato come sezione di un fibrato vettoriale associato al fibrato $P(\mathbb{R}^4,\ SU(N))$ tramite una data rappresentazione. Tale campo si trasforma sotto $g \in SU(N)$ come:

$$\psi \to g\psi \qquad\qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi}g^{-1} \tag{2.27}$$

dove abbiamo trascurato di indicare esplicitamente la rappresentazione di $SU(N)$.
In analogia col caso ben noto del campo elettromagnetico (in cui il gruppo strutturale è $U(1)$, abeliano), scriviamo per la lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}[\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) + m]\psi = \overline{\psi}[\mathrm{i}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu + m]\psi \tag{2.28}$$

dove si è indicato con $\mathcal{D}_\mu$ la derivata covariante rispetto alla connessione nel fibrato vettoriale. Tale lagrangiana, proprio grazie alle proprietà di trasformazione della derivata covariante, è invariante per trasformazioni di gauge. Le trasformazioni di gauge, si ricordi, consistono nel cambiamento di rappresentativo all'interno della classe di equivalenza che definisce un elemento di un fibrato vettoriale associato ad un fibrato principale e si esplicitano nella forma:

$$\begin{gathered} \psi \to g\psi \qquad\qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi}g^{-1} \\ \mathcal{A}_\mu \to g\mathcal{A}_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \end{gathered} \tag{2.29}$$

Naturalmente, qualora si desideri far intervenire una *costante di accoppiamento* che, in qualche modo, misuri l'intensità dell'interazione del campo di Yang-Mills con se stesso e gli altri campi, è possibile operare la nota procedura di riscalamento dei campi di gauge, per cui il campo fisico non coincide più con la connessione, ma gli è proporzionale:

$$\mathcal{A}^{\text{phys}} = \frac{\mathcal{A}}{e} \qquad , \qquad \mathcal{F}^{\text{phys}} = \frac{\mathcal{F}}{e}$$

da cui:

$$\mathcal{F}^{\text{phys}} = \mathrm{d}\mathcal{A}^{\text{phys}} + e[\mathcal{A}^{\text{phys}}, \mathcal{A}^{\text{phys}}]$$
$$\mathcal{D} = \mathrm{d} + e[\mathcal{A}^{\text{phys}}, \cdot]$$
$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + e\mathcal{A}^{\text{phys}}_\mu$$

In tal modo la lagrangiana completa assume la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{F}^{\text{phys}}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\text{phys}\mu\nu}) + \overline{\psi}[\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + e\mathcal{A}^{\text{phys}}_\mu) + m]\psi$$

2.3.3 Istantoni nelle teorie di soli campi di gauge

Trattiamo il caso particolare della teoria del campo di gauge bosonico non interagente di cui al paragrafo 2.3.2 con la relativa azione (2.25). Si consideri la disuguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\,[(\mathcal{F}_{\mu\nu} \pm\ ^*\mathcal{F}_{\mu\nu})(\mathcal{F}^{\mu\nu} \pm\ ^*\mathcal{F}^{\mu\nu})]\ \mathrm{d}^4x \geq 0 \tag{2.30}$$

da cui, considerato che $^*\mathcal{F}_{\mu\nu}\ ^*\mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}\ \mathcal{F}^{\mu\nu}$:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})\ \mathrm{d}^4x \geq \mp \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\ (\mathcal{F}_{\mu\nu}\ ^*\mathcal{F}^{\mu\nu})\ \mathrm{d}^4x \tag{2.31}$$

e, definendo $k = \dfrac{-1}{16\pi^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\ ^*\mathcal{F}^{\mu\nu})\ \mathrm{d}^4x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^2$, si ottiene per l'azione:

$$\mathcal{S} \geq \pm 8\pi^2 k \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{S} \geq 8\pi^2|k| \tag{2.32}$$

Mostreremo nel seguito che la quantità k, detta carica istantonica, è un numero che caratterizza dal punto di vista topologico i modi in cui la sfera tridimensionale S^3 è mappata nel gruppo strutturale $SU(N)$.

Tornando alla questione dell'approssimazione semiclassica, siamo interessati a trovare le soluzioni delle equazioni di Yang-Mills:

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = (\mathcal{D}\ ^*\mathcal{F})^\nu = 0 \tag{2.33}$$

Esse sono equazioni alle derivate parziali del secondo ordine e, pertanto, sono di difficile soluzione. Tuttavia siamo in grado di esibire condizioni di minimo locale per l'azione anche sfruttando la (2.32), la quale è saturata laddove:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mp\ {}^*\mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

Tali condizioni, dette rispettivamente di anti-autodualità e autodualità (o, dall'inglese, ASD e SD), garantiscono che i campi di gauge, che per definizione verificano l'identità di Bianchi, soddisfino anche alle equazioni del moto, infatti:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mp\mathcal{D}\ {}^*\mathcal{F} = 0 \tag{2.35}$$

Le corrispondenti configurazioni di campo sono dette rispettivamente *istantoni ASD* e *istantoni SD*. In corrispondenza dei primi k è positivo, dei secondi negativo. In ogni caso, come detto, si ottiene:

$$\mathcal{S} = 8\pi^2|k| \tag{2.36}$$

2.3.4 Geometria degli istantoni di Yang-Mills

Appurati il ruolo e l'importanza delle soluzioni istantoniche delle equazioni di Yang-Mills veniamo ad uno studio più approfondito della geometria che li caratterizza.

Affinchè l'azione di un campo di Yang-Mills sia finita dobbiamo richiedere che agli estremi dello spazio-tempo il campo stesso tenda a zero, o più esattamente tenda ad un campo gauge-equivalente allo zero. Questo si ottiene imponendo:

$$\mathcal{A}(x) \to g(x)^{-1}\mathrm{d}g(x) \qquad \text{quando } \|x\| \to L$$

con L numero positivo arbitrario. Poichè $\|x\| = L$ è la sfera S^3 nello spazio euclideo quadridimensionale $\mathbb{R}^4$, questo definisce una mappa $g\colon S^3 \to SU(N)$ che è classificata topologicamente dal terzo gruppo di omotopia di $SU(N)$, $\pi_3(SU(N)) \simeq \mathbb{Z}$.
Questo fatto può essere formalizzato nel seguente modo. Si compattifichi $\mathbb{R}^4$ alla sfera S^4 aggiungendo il punto all'infinito come polo Sud e si considerino i fibrati principali su S^4 con gruppo strutturale $SU(N)$. Un ricoprimento aperto per lo spazio base S^4 è dato dagli emisferi Nord e Sud con intersezione nell'equatore S^3. Tali fibrati sono classificati dalle funzioni di transizione all'equatore e quindi dalle mappe $g\colon S^3 \to SU(N)$, cioè da $\pi_3(SU(N)) \simeq \mathbb{Z}$. Imporre che il potenziale di gauge si annulli all'infinito equivale a considerare le forme di connessione nulle nell'emisfero Sud, non nulle nell'emisfero Nord e tali che $\mathcal{A} = g(x)^{-1}\mathrm{d}g(x)$ sull'equatore, che viene ad identificarsi con la sfera $\|x\| = L$ considerata in precedenza.

Se si considera il secondo carattere dei Chern dei fibrati su S^4 appena costruiti si riconosce che, per una configurazione di campo istantonica, $\mathcal{S} = 8\pi^2|k| = 8\pi^2 \left|\int_{S^4} \mathrm{ch}_2(\mathcal{F})\right|$. Inoltre si dimostra che k è un intero e che coincide proprio con l'ordine in $\pi_3(SU(N))$ della mappa $g\colon S^3 \to SU(N)$ che classifica il fibrato. Infatti, essendo il secondo carattere di Chern una classe caratteristica, esso è chiuso e perciò localmente esatto. La 3-forma locale $Q_3(\mathcal{A},\ \mathcal{F}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2\ \mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3)$, detta *forma locale di Chern-Simons* di $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F})$, è tale che $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \mathrm{d}Q_3(\mathcal{A},\ \mathcal{F})$. Usando questa uguaglianza, il fatto che $\mathcal{F}$ è nullo nell'emisfero Sud di S^4 e il teorema di Stokes si trova:

$$\int_{S^4} \mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} \mathrm{tr}\mathcal{A}^3 = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3 = k \quad \in \quad \pi_3(SU(N))$$

2.3.5 Lo spazio dei moduli istantonici

In questa sezione procederemo alla descrizione geometrica del cosiddetto spazio dei moduli degli istantoni di Yang-Mills. Il fine è quello di utilizzare l'approssimazione semiclassica per calcolare l'integrale nella (2.19) ristretto allo spazio dei moduli istantonici, barattando così un integrale funzionale (su uno spazio infinito-dimensionale) con uno ordinario, una volta mostrato che il detto spazio dei moduli è una varietà differenziabile. Lo spazio in questione è costituito dalle configurazioni istantoniche non gauge-equivalenti del potenziale di gauge di un campo di Yang-Mills. Euristicamente esso è ottenuto considerando l'insieme infinito-dimensionale $\mathcal{C}_N$ di tutte le connessioni SD (ovvero ASD) nulle nell'emisfero Sud per un $SU(N)$-fibrato principale su S^4, e scendendo al quoziente $\mathcal{M}_N := \mathcal{C}_N/\mathcal{G}$, dove $\mathcal{G}$ è il gruppo di gauge. In realtà abbiamo già visto come gli spazi $\mathcal{C}_N$ e $\mathcal{M}_N$ si separino nell'unione disgiunta di sottoinsiemi a carica istantonica definita:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_N &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}_{k,N} \\ \mathcal{M}_N &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_{k,N} \end{aligned}$$

Il seguente fondamentale teorema, dovuto ad Atiyah, Hitchin e Singer [3], mostra appunto come lo spazio dei moduli istantonici $\mathcal{M}$ sia una varietà differenziabile e ne calcola la dimensione in termini di classi caratteristiche. La prova, benchè ne daremo una versione in qualche modo accennata, specialmente negli aspetti più tecnici, è importante perchè introduce alcuni risultati intermedi utili per il seguito. Tuttavia, quando faremo uso di tali risultati, lo indicheremo esplicitamente, così che il lettore non interessato a ripercorrere la dimostrazione sappia dove ritrovarli.
Un'ultima nota riguarda una delle ipotesi del teorema, che verrà sempre sottintesa nel

seguito. Per ragioni tecniche considereremo infatti uno spazio dei moduli costituito da connessioni *irriducibili*. Questo indica connessioni per cui lo stabilizzatore (gruppo di isotropia) di $\mathcal{A}$, $S_{\mathcal{A}} := \{g \in \mathcal{G} : \; g.\mathcal{A} = \mathcal{A}\}$ dove $\mathcal{G}$ è il gruppo di gauge, corrisponde al centro $Z(G)$ del gruppo strutturale G (nel nostro caso $SU(N)$). A tal proposito esiste poi un noto teorema per i fibrati principali, che afferma che $S_{\mathcal{A}}$ è isomorfo al centralizzatore del gruppo di olonomia della varietà.

Teorema 2.3.1 *Sia M una 4-varietà riemanniana compatta con curvatura scalare positiva. Sia P un G-fibrato principale sopra M con G un gruppo di Lie compatto semisemplice. Allora lo spazio dei moduli $\mathcal{M}$ delle connessioni irriducibili autoduali (anti-autoduali) su P è vuoto oppure è una varietà di dimensione:*

$$\dim\, \mathcal{M} = p_1(\mathrm{ad}(P)) - \frac{1}{2}(\chi(M) - \tau(M))\dim\, G$$

dove $p_1(\mathrm{ad}(P))$ è la prima classe di Pontrjagin del fibrato associato a P tramite la rappresentazione aggiunta, $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero di M e $\tau(M)$ è la segnatura di Hirzebruch di M.

Prova: Si assuma che lo spazio $\mathcal{M}$ sia non vuoto. Per prima cosa studieremo lo spazio delle deformazioni infinitesime di una connessione autoduale e ne calcoleremo la dimensione.

Sia $\mathcal{A}$ una connessione autoduale. Se $\mathcal{A}'$ è un'altra connessione, le due differiscono per un elemento $\tau \in \Gamma(\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P))$ e si ha (vedi, ad esempio, dimostrazione del teorema (2.2.2) di Chern-Weil) la relazione tra le due curvature:

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} = \mathcal{D}\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau]$$

con $\mathcal{D}\tau = \mathrm{d}\tau + [\mathcal{A}, \tau]$ derivata covariante su $\Gamma(\mathrm{T}^\bullet M \otimes \mathrm{ad}(P))$. Perciò, se $\mathcal{A}_t$ è una famiglia ad un parametro di connessioni autoduali, si ha:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F} + \mathcal{D}\tau_t + \frac{1}{2}[\tau_t, \tau_t]$$

e:

$$p_-(\mathcal{D}\tau_t + \frac{1}{2}[\tau_t, \tau_t]) = 0 \quad \in \quad \Gamma(\wedge^2_- \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P))$$

dove $\wedge^2_- \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)$ indica il sottofibrato non autoduale di $\wedge^2 \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)$ e

$$p_- \colon \Gamma(\wedge^2 \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(\wedge^2_- \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P))$$

è la proiezione $p_-\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \;{}^*\alpha)$.

Derivando rispetto a t e ponendo $t = 0$, otteniamo $p_-(\mathcal{D}\dot{\tau}) = 0 \in \Gamma(\wedge^2_- \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P))$, dove $\dot\tau = \frac{\mathrm{d}\tau_t}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$. Se la famiglia fosse ottenuta da una famiglia ad un parametro di trasformazioni di gauge $\mathcal{A}_t = f_t^{-1}\mathcal{A}f_t + f_t^{-1}\mathrm{d}f_t$, con f_t appartenente al gruppo di gauge $\mathcal{G}$, allora, poichè $(\dot{f^{-1}}) = -\dot f$ e $\mathrm{d}f_0 = 0$, si avrebbe $\dot\tau = \nabla\dot f$, dove $\dot f \in \Gamma(\mathrm{ad(P)})$. In tal modo, una famiglia ad un parametro di connessioni autoduali non gauge-equivalenti definisce un elemento in ker $p_-\mathcal{D}/\mathrm{im}\ \nabla$. Ora $p_-\mathcal{D}\nabla = p_-(\mathcal{D}\nabla) = p_-(\mathcal{F}) = 0$ poichè la connessione è autoduale, perciò abbiamo definito un elemento nel primo gruppo di coomologia $H^1(\mathrm{ad}(P))$ del seguente complesso (ellittico):

$$0 \to \Gamma(\mathrm{ad}(P)) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)) \xrightarrow{p_-\mathcal{D}} \Gamma(\wedge^2_-\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)) \to 0$$

Calcoleremo ora l'indice $h^0 - h^1 + h^2$ (dove $h^i := \dim\ H^i(\mathrm{ad}(P))$) del complesso attraverso il teorema dell'indice e mostreremo che $h^0 = h^2 = 0$ così che il risultato trovato sarà appunto la dimensione dello spazio delle deformazioni infinitesime di un connessione autoduale.
In effetti $h^0 = 0$ poichè $H^0(\mathrm{ad}(P))$ è costituito dalle sezioni covariantemente costanti di $\mathrm{ad}(P)$, le quali, portando a $\dot\tau = 0$, corrispondono all'algebra di Lie dello stabilizzatore $S_\mathcal{A}$ e quindi all'algebra di Lie del centralizzatore del gruppo di olonomia. Poichè la connessione è irriducibile lo stabilizzatore $S_\mathcal{A}$ è il centro di G, ed essendo G semisemplice la dimensione del suo centro è nulla. Per mostrare che anche h^2 è nullo conviene rimpiazzare, attraverso l'usuale *rolling up*, il complesso ellittico di cui sopra con il singolo operatore ellittico:

$$\mathrm{p}_-\mathcal{D} + \nabla^* \colon \Gamma(\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(\mathrm{ad}(P)) \oplus \Gamma(\wedge^2_-\mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{ad}(P))$$

in cui, si noti, ker $(\mathrm{p}_-\mathcal{D}+\nabla^*) = H^1(\mathrm{ad}(P))$ e quindi dim (ker $(\mathrm{p}_-\mathcal{D}+\nabla^*)^*) = h^0+h^2 = h^2$. Si verifica facilmente che tale operatore può essere scritto in termini dell'operatore di Dirac twistato:

$$D \colon \Gamma(S_+(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(S_-(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P))$$

poichè tali operatori si identificano grazie all'isomorfismo $\mathrm{T}^*M \overset{g}{\simeq} \mathrm{T}M \overset{c}{\simeq} S_+(M) \otimes S_-(M)$. Mostreremo che ker $D^* = 0$. A tal fine si esprima D^2 attraverso la formula di Weitzenbock:

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \mathsf{F} + \frac{1}{4}\kappa$$

dove F indica la contrazione di Clifford della curvatura di twisting del fibrato di Clifford (che, nel caso di uno spin bundle twistato consiste in $1 \otimes K(E)$, dove E è il fibrato di twisting) e κ è la curvatura scalare della varietà M. Considerato il fibrato $S_-(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P)$, esso ha curvatura di twisting $1 \otimes K(S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P)) = 1 \otimes K(S_-(M)) \otimes$

$1 + 1 \otimes 1 \otimes K(\mathrm{ad}(P))$, e solo il primo termine contribuisce alla contrazione di Clifford, con $\frac{1}{4}\kappa$, mentre nel secondo $K(\mathrm{ad}(P))$ è autoduale e perciò agisce in maniera triviale su $S_-(M)$ (spinori anti-autoduali, poichè chiralità e tensore di Ricci si corrispondono in dimensione 4) in fase di contrazione. In tal modo, nelle nostre ipotesi di curvatura scalare positiva, $D^{*2} = \nabla^*\nabla + \frac{1}{2}\kappa$ non è mai nullo e, da $D^*s = 0 \Rightarrow D^{*2}s = 0 \Rightarrow s = 0$ per ogni $s \in \Gamma(S_-(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P))$, si deduce $h^2 = \dim \ker D^* = 0$.
Abbiamo finora provato che:

$$\mathrm{ind}\ D = h^1$$

e, dal teorema dell'indice per operatori di Dirac twistati:

$$h^1 = \mathrm{ind}\ D = \int_M \mathrm{ch}(\mathrm{ad}(P))\ \mathrm{ch}(S_-(M))\ \hat{A}(M)\Big|_{\mathrm{vol}} = p_1 - \frac{1}{2}(\chi - \tau)\dim G$$

Questo conclude la parte infinitesima della dimostrazione. D'altra parte queste deformazioni infinitesime possono essere integrate costruendo così uno spazio dei moduli locale, attorno ad ogni connessione autoduale, che sia varietà differenziabile con spazio tangente $H^1(\mathrm{ad}(P))$. Infine è possibile mostrare come questi spazi locali siano mappati, iniettivamente e in modo continuo rispetto all'opportuna topologia, nello spazio globale dei moduli $\mathcal{M}$ fino a ricoprirlo, così che $\mathcal{M}$ acquisisca la struttura di una varietà differenziabile della dimensione prevista.
Si noti infine che il fibrato indice della famiglia di operatori di Dirac, che chiamiamo ancora $D : \mathcal{M} \to \mathsf{F}$, si identifica, per quanto detto sopra, con lo spazio tangente complessificato della varietà $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ind}\ (D : \mathcal{M} \to \mathsf{F}) = \mathrm{T}\mathcal{M} \otimes \mathbb{C} \\ &= \ker\ (D\colon \Gamma(S_+(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(S_-(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P))) \end{aligned}$$

□

2.3.6 Istantoni e approssimazione semiclassica

In questo paragrafo esamineremo in che modo l'approssimazione semiclassica si applichi nell'ambito delle teorie di gauge in esame. Quest'ambito è particolarmente interessante grazie alla possibilità di aggiungere alla suddetta approssimazione semiclassica, quella derivante dal considerare, tra tutte le configurazioni di campo classiche, soltanto quelle che soddisfazione alle condizioni di (anti-)autodualità, cioè le configurazioni istantoniche.

Consideriamo la semplice teoria del solo campo $\mathcal{A}$, la cui azione è data dalla (2.25). La valutazione della funzione di partizione nell'approssimazione semiclassica prevede, secondo la (2.20), l'integrazione su configurazioni di campo vicine a quelle classiche, le quali saranno espresse come:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\text{cl}} + \delta\mathcal{A}$$

dove $\delta\mathcal{A}$ non contiene componenti che siano zero-modi. L'azione (2.25) si scriverà, in questi termini, nella forma:

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}[\mathcal{A}^{\text{cl}} + \delta\mathcal{A}] = \mathcal{S}^{\text{cl}}_{\text{YM}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{YM}}[\mathcal{A}^{\text{cl}}, \delta\mathcal{A}]$$

dove il primo termine corrisponde alla (2.25), calcolata in corrispondenza delle soluzioni delle equazioni del moto, e il secondo termine raccoglie il resto dell'espressione. In tal modo l'approssimazione semiclassica dà luogo a:

$$Z \simeq \int [\mathcal{D}\mathcal{A}^{\text{cl}}] \int [\mathcal{D}\delta\mathcal{A}] \mathrm{e}^{-\mathcal{S}^{\text{cl}}_{\text{YM}} - \tilde{\mathcal{S}}_{\text{YM}}}$$

Come preannunciato, applichiamo ora l'ulteriore approssimazione di estendere l'integrale di cui sopra sulle configurazioni classiche, alle sole configurazioni istantoniche. Per le soluzioni istantoniche delle equazioni del moto, restringiamo l'attenzione ad un settore $\mathcal{M}_{k,N}$, a carica istantonica definita k, dello spazio dei moduli completo $\mathcal{M}_N$:

$$\begin{aligned} Z &\simeq \int_{\mathcal{M}_{k,N}} \mu(\mathcal{M}_{k,N}) \int [\mathcal{D}\delta\mathcal{A}] \ \mathrm{e}^{-\mathcal{S}^{\text{cl}}_{\text{YM}} - \tilde{\mathcal{S}}_{\text{YM}}} \\ &= \int_{\mathcal{M}_{k,N}} \mathrm{e}^{-\mathcal{S}^{\text{inst}}_{\text{YM}}} \mu(\mathcal{M}_{k,N}) \int [\mathcal{D}\delta\mathcal{A}] \mathrm{e}^{-\tilde{\mathcal{S}}_{\text{YM}}} = \\ &= \mathrm{e}^{-8\pi^2|k|} \int_{\mathcal{M}_{k,N}} \mu(\mathcal{M}_{k,N}) \Delta \end{aligned} \tag{2.37}$$

dove si è indicato con $\mu(\mathcal{M}_{k,N})$ la misura sullo spazio dei moduli e dove:

$$\Delta := \int [\mathcal{D}\delta\mathcal{A}] \mathrm{e}^{-\tilde{\mathcal{S}}_{\text{YM}}}$$

è un'espressione che, abbastanza in generale, si è in grado di calcolare esplicitamente con metodi la cui esposizione trascende i propositi di questo lavoro (si veda, ad esempio, [18]). Si consideri in particolare che, in contesti molto generali, Δ è una costante.

2.3.7 I dati ADHM

Lo spazio $\mathcal{M}_N$ delle $SU(N)$-connessioni autoduali su S^4 introdotto nel paragrafo 2.3.5 è estremamente astratto. I suoi elementi sono classi di equivalenza di gauge di connessioni su un fibrato principale. E' immediato immaginare quanto possa essere difficile trattare il calcolo di integrali su una siffatta varietà differenziabile.

Fortunatamente esiste il modo di identificare le componenti $\mathcal{M}_{k,N}$ di $\mathcal{M}$ a carica istantonica k con spazi di matrici complesse, i quali, come sottovarietà di $\mathbb{C}^n$, per n opportuno, sono molto più trattabili. Questa tecnica è ancora una volta legata ad i nomi di Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin e la costruzione che porta al risultato è detta *costruzione ADHM*. In questa sezione ripercorreremo tale costruzione basandoci su [1], [15] e [29].

Quaternioni

Il nostro attacco al problema degli istantoni si baserà su metodi analitici complessi riguardanti quaternioni e twistori. Iniziamo richiamando brevemente la definizione e le proprietà elementari dei quaternioni. L'insieme dei quaternioni $\mathbb{H}$, similmente a quanto accade per l'insieme complesso $\mathbb{C}$, è un'estensione del campo dei reali $\mathbb{R}$ con elementi del tipo:

$$x = x_1 + x_2\mathrm{i} + x_3\mathrm{j} + x_4\mathrm{k} \tag{2.38}$$

dove $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ e i, j, k sono tre simboli che soddisfano:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \tag{2.39}$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k} \tag{2.40}$$

$$\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i} \tag{2.41}$$

$$\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j} \tag{2.42}$$

Il coniugato $\bar{x}$ di un quaternione x è definito come:

$$\bar{x} = x_1 - x_2\mathrm{i} - x_3\mathrm{j} - x_4\mathrm{k}$$

e la coniugazione è anti-involutiva, cioè $\overline{(xy)} = \bar{y}\bar{x}$. In virtù della (2.39) si ha la norma, nulla solo per $x = 0$:

$$|x|^2 := x\bar{x} = \bar{x}x = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2$$

Se $x \neq 0$, esso ha un unico inverso $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$. I quaternioni di norma unitaria formano così un gruppo moltiplicativo diffeomorfo a S^3.
Identificando i con l'unità immaginaria, possiamo riguardare ai numeri complessi $\mathbb{C}$ come contenuti nei quaternioni $\mathbb{H}$. Inoltre ogni quaternione è espresso in maniera unica nella forma:

$$x = z_1 + z_2\mathrm{j} \qquad \text{dove } z_1 = x_1 + x_2\mathrm{i} \text{ e } z_2 = x_3 + x_4\mathrm{i}$$

In tal modo $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ e la moltiplicazione di due quaternioni si esprime, in questi termini, come:

$$xg = (z_1 + z_2\mathrm{j})(g_1 + g_2\mathrm{j}) = z_1 g_1 - z_2\bar{g}_2 + (z_1 g_2 + z_2\bar{g}_1)\mathrm{j}$$

Infine possiamo identificare l'algebra $\mathbb{H}$ con una sottoalgebra delle matrici complesse 2×2 dove i, j, k sono le matrici:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

e, in particolare, il gruppo dei quaternioni di norma unitaria si identifica con $SU(2)$.

Spazio dei twistori di Penrose

Si noti preliminarmente che sussistono le identificazioni $P_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$, $P_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$, $P_1(\mathbb{H}) \simeq S^4$ tra le linee proiettive (con moltiplicazione per scalari a sinistra) degli spazi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e le opportune sfere. Consideriamo poi lo spazio proiettivo $P_3(\mathbb{C})$ delle linee complesse in $\mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{H}^2$ e la mappa:

$$\begin{array}{rcl} P_3(\mathbb{C}) & \to & P_1(\mathbb{H}) \\ [(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{P_3(\mathbb{C})} & \mapsto & [(z_1 + z_2\mathrm{j}, z_3 + z_4\mathrm{j})]_{P_1(\mathbb{H})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{P_3(\mathbb{C})} & \subset & [(z_1 + z_2\mathrm{j}, z_3 + z_4\mathrm{j})]_{P_1(\mathbb{H})} \end{array} \tag{2.43}$$

ben definita poichè

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \in [(z_1 + z_2\mathrm{j}, z_3 + z_4\mathrm{j})]_{P_1(\mathbb{H})} \Rightarrow (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, \lambda z_4) \in [(z_1 + z_2\mathrm{j}, z_3 + z_4\mathrm{j})]_{P_1(\mathbb{H})}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Per trovare tutti gli elementi di $P_3(\mathbb{C})$ proiettati su un fissato elemento di $P_1(\mathbb{H})$ basterà considerare tutte le $\mathbb{C}$-linee contenute in tale elemento. Essendo tale elemento una linea quaternionica, copia di $\mathbb{C}^2$, tutte le linee complesse in essa contenute formeranno una copia di $P_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$. In tal modo (2.43) è un fibrato su $P_1(\mathbb{H}) \simeq S^4$ con fibra $P_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Dal punto di vista topologico è importante notare una caratteristica del fibrato costruito. Si scelga a tal fine una fibra $F \simeq S^2$ in $P_3(\mathbb{C})$ e, per ogni punto u di tale fibra, si consideri lo spazio tangente $\mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})$. Si costruisca quindi il quoziente $\mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F$, che è una copia di $\mathbb{C}^2$. Lo spazio $\bigcup_{u \in F} \mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F$, con la topologia ereditata da $\mathrm{T}P_3(\mathbb{C})$ e proiezione $v \mapsto u$ se $v \in \mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F$, è un fibrato vettoriale su F con gruppo strutturale $U(2)$. I fibrati vettoriali complessi su S^2 sono classificati dalle mappe dall'equatore S^1 al gruppo strutturale, cioè dal gruppo fondamentale del gruppo strutturale. Nel nostro caso:

$$\pi_1(U(2)) \simeq \mathbb{Z}$$

e il fibrato in questione corrisponde all'intero $2 \in \pi_1(U(2))$. Questo significa che il fibrato non è banale e l'identificazione verticale tra gli spazi $\mathbb{C}^2 = \mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F$ indotta dalla proiezione $P_3(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{H})$ non preserva la struttura complessa.

La moltiplicazione a sinistra per j induce una trasformazione σ su $P_3\mathbb{C}$ che è antilineare e soddisfa $\sigma^2 = 1$. In coordinate omogenee si scrive:

$$\sigma[(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{P_3(\mathbb{C})} = [(-\bar{z_2}, \bar{z_1}, -\bar{z_4}, \bar{z_3})]_{P_3(\mathbb{C})} \tag{2.44}$$

Chiaramente σ preserva la fibrazione, agendo trivialmente su $P_1(\mathbb{H})$ e agendo come mappa antipodale sulle fibre S^2.

Coordinate complesse su S^4

Lo spazio dei twistori di Penrose sopra introdotto costituisce un prezioso strumento per affrontare problemi su S^4, poichè interviene nello studio delle strutture complesse di $\mathbb{R}^4$ e perciò le strutture complesse *locali* di S^4 (nota: S^4 non possiede strutture complesse globali).
In effetti, contrariamente a quanto accade per $\mathbb{R}^2$, in cui esiste una sola struttura complessa compatibile con metrica e orientamento, è possibile assegnare ad $\mathbb{R}^4$ diverse strutture complesse.
In pratica, assegnata una struttura complessa J su $\mathbb{R}^4$, compatibile con metrica e orientamento, è possibile costruire tutte le altre come $R^{-1}JR$, dove $R \in SO(4)$. Dal conteggio va sottratto il sottogruppo di $SO(4)$ che genera la stessa struttura J di partenza, ed è immediato verificare che tale sottogruppo è $U(2)$. Perciò l'insieme di tutte le strutture complesse su R^4 è parametrizzato da $SO(4)/U(2) \simeq S^2$.

E' a questo punto che interviene lo spazio dei twistori di Penrose, il quale permette di tenere conto simultaneamente di tutte le strutture complesse di $\mathbb{R}^4$. Infatti, si attui una fissata identificazione tra lo spazio base $P_1(\mathbb{H})$ e S^4; questo assegna localmente ad S^4 una struttura complessa. Inoltre, attraverso la proiezione $P_3(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{H})$, l'immagine di ogni sezione $u(p)$ di $P_3(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{H})$ può essere identificata con S^4, che viene così ad assumere strutture complesse locali, che scendono sul tangente $\mathrm{T}_p S^4$ dagli spazi $\mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F$.
Che, in tal modo, si assegnino a $\mathbb{R}^4$ tutte le possibili strutture complesse è garantito dall'osservazione di carattere topologico sulla non banalità del fibrato $v \in \mathrm{T}_u P_3(\mathbb{C})/\mathrm{T}_u F \to F$: al variare di u su F si percorrono tutte le possibili strutture complesse per $\mathrm{T}_p S^4$.

Interpretazione twistoriale degli istantoni

In questa sezione mostreremo come interpretare le equazioni di autodualità per un campo di Yang-Mills su S^4 in termini di analisi complessa sullo spazio dei twistori $P_3(\mathbb{C})$.

Preliminarmente abbiamo bisogno di comprendere il significato delle equazioni $^*\omega = \pm\omega$ per una 2-forma ω su $\mathbb{R}^4$ in termini di coordinate complesse. Sappiamo che la 2-forma ω, una volta assegnata ad $\mathbb{R}^4$ una struttura complessa, possiede la decomposizione:

$$\omega = \omega^{2,0} + \omega^{1,1} + \omega^{0,2} \tag{2.45}$$

Inoltre esiste la decomposizione di ω secondo gli autospazi dell'operatore di Hodge *:

$$\omega = \omega^+ + \omega^- \tag{2.46}$$

Capire la relazione tra le due decomposizioni è una questione di algebra lineare. L'equazione (2.46) corrisponde al decomporre una rappresentazione di $SO(4)$ in due rappresentazioni irriducibili di dimensione 3, mentre la (2.45) corrisponde alla decomposizione di tale rappresentazione secondo il sottogruppo $U(2)$. Le componenti $(2,0)$ e $(0,2)$ hanno dimensione 1, mentre la rappresentazione 4-dimensionale $(1,1)$ si decompone ulteriormente come:

$$\omega^{1,1} = \omega_0^{1,1} + \alpha$$

dove α è di dimensione 1 e proporzionale alla metrica hermitiana, e $\omega_0^{1,1}$ è di dimensione 3 e, in quanto irriducibile, corrisponde ad una delle due parti irriducibile della (2.46). In particolare, giacchè la metrica hermitiana è autoduale, deve aversi:

$$\omega^- = \omega_0^{1,1}$$

Questo mostra in particolare che lo spazio Ω^- delle ω tali che $^*\omega = -\omega$ è di tipo $(1,1)$ per qualunque struttura complessa. E' vero anche il vice-versa, poichè lo spazio $\Omega^{1,1}$ è invariante sotto azione di $SO(4)$ e non costituisce l'intero spazio.

Abbiamo perciò:

Lemma 2.3.2 *Una 2-forma ω su R^4 è anti-autoduale se e solo se essa è di tipo $(1,1)$ per tutte le strutture complesse compatibili.*

Si consideri adesso una forma ω su S^4 e la si sollevi orizzontalmente ad una forma $\tilde{\omega}$ su $P_3(\mathbb{C})$ (ovvero $\tilde{\omega}$ sia tale da non avere componenti nella direzione delle fibre di $P_3(\mathbb{C})$). Allora, dal lemma precedente:

Proposizione 2.3.3 *Una 2-forma ω su S^4 è anti-autoduale se e solo se il suo sollevamento $\tilde{\omega}$ a $P_3(\mathbb{C})$ è di tipo $(1,1)$.*

Infine consideriamo un fibrato vettoriale complesso E su S^4 con struttura hermitiana e connessione. Sia $\mathcal{F}$ la sua curvatura. Se solleviamo E per ottenere un fibrato $\tilde{E}$ su $P_3(\mathbb{C})$, la curvatura sarà semplicemente il sollevamento $\tilde{\mathcal{F}}$ di $\mathcal{F}$. Perciò, da quanto detto prima, si deduce:

Proposizione 2.3.4 *Un fibrato vettoriale complesso E su S^4 con struttura hermitiana e connessione ha curvatura anti-autoduale se e solo se il sollevamento $\tilde{E}$ su $P_3(\mathbb{C})$ con la connessione sollevata ha curvatura di tipo $(1,1)$.*

Questo risultato, unitamente al fatto, noto, che esiste una corrispondenza 1-1 tra strutture olomorfe su fibrati vettoriali complessi e connessioni di tipo $(1,1)$, mostra che ad ogni fibrato $E \to S^4$ con connessione anti-autoduale si associ in maniera naturale un fibrato olomorfo $\tilde{E} \to P_3(\mathbb{C})$.
Più precisamente il fibrato $\tilde{E}$ ha una restrizione $\tilde{E}\Big|_{F_x}$ sulle fibre F_x di $P_3(\mathbb{C})$ banale, poichè un elemento di E_x definisce una sezione olomorfa di $\tilde{E}\Big|_{F_x}$.
Per quanto riguarda le strutture hermitiane, abbiamo per E il morfismo sesquilineare $\tau \colon E \to E^*$. Questo può definire un sollevamento anti-olomorfo $\tilde{\tau}$ in cui la parte verticale ricopra la mappa σ su $P_3(\mathbb{C})$ (che, si ricordi, è completamente verticale, mappando le fibre in se stesse). Tale struttura hermitiano porta ad un'unica connessione di tipo $(1,1)$, la quale, si mostra facilmente, è completamente orizzontale e discende a connessione (anti-autoduale) per E.

Per riassumere i nostri risultati conviene introdurre la seguente definizione.

Definizione 2.3.5 *Sia V un fibrato vettoriale olomorfo sopra $P_3(\mathbb{C})$. Un isomorfismo sesquilineare $p \colon V \to V^*$ che ricopra σ su $P_3(\mathbb{C})$ tale che:*

$$\langle u, pv \rangle = \overline{\langle v, pu \rangle}$$

si dice forma reale su V. Se inoltre V è banale su tutte le fibre di $P_3(\mathbb{C})$, allora p induce una forma hermitiana non degenere sullo spazio delle sezioni olomorfe di V ristretto alle fibre di $P_3(\mathbb{C})$, e diremo che la forma reale p è positiva.
Due fibrati vettoriali V, W con forme reali positive si dicono isomorfi se esiste un morfismo di fibrati olomorfi che commuti con p.

Le nostre conclusioni possono essere ora scritte nella forma:

Teorema 2.3.6 *Esiste una corrispondenza naturale (1-1) tra:*

(i) classi di equivalenza di gauge di $SU(N)$-connessioni anti-autoduali su S^4 e

(ii) classi di isomorfismo di fibrati vettoriali olomorfi con fibra $\mathbb{C}^N$ sopra $P_3(\mathbb{C})$ con una forma reale positiva.

Istantoni framed e corrispondenza ADHM

L'ultimo teorema, benchè sempre relativamente astratto, permette di completare la costruzione ADHM, grazie ad un risultato noto, mostrato ad esempio in [15], sui fibrati vettoriali olomorfi su $P_3(\mathbb{C})$. Esso riguarda fibrati olomorfi con fibra $\mathbb{C}^N$ sopra $P_3(\mathbb{C})$ e con una forma reale positiva, unitamente ad una esplicita banalizzazione olomorfa sulla fibra all'infinito F_∞ di $P_3(\mathbb{C})$, cioè ad una sezione olomorfa $\tilde{s} : F_\infty \to \tilde{P}\Big|_{F_\infty}$ dove $\tilde{P}$ indica l'$SU(N)$-fibrato principale associato ad $\tilde{E}$ (si noti che $\tilde{s}$ scende ad un esplicito isomorfismo $SU(N) \simeq P_\infty$, dove P è l'$SU(N)$-fibrato associato ad E).
Per questo motivo considereremo, d'ora in poi, anche lo spazio dei moduli $\hat{\mathcal{M}}_N$ (detto dei moduli degli istantoni *framed*, per chiari motivi) i cui elementi rappresentano le classi di equivalenza di gauge delle coppie:

$$(SU(N)\text{-connessione anti-autoduale su } S^4, \text{isomorfismo } P_\infty \simeq SU(N))$$

le quali, grazie al teorema (2.3.6) e a quanto osservato circa la banalizzazione all'infinito, sono in corrispondenza (1-1) con i fibrati olomorfi suddetti.
In tal modo il risultato riguardante i fibrati olomorfi di cui sopra può essere espresso in termini di elementi dei sottospazi a carica istantonica definita $\hat{\mathcal{M}}_{N,k}$ nel seguente modo:

Teorema 2.3.7 *Esiste una corrispondenza (1-1) tra elementi di $\hat{\mathcal{M}}_{N,k}$ ($(SU(N),k)$-istantoni framed modulo equivalenza di gauge) e matrici:*

$$(\alpha_1, \alpha_2, a, b) \in M_{k\times k}(\mathbb{C}) \times M_{k\times k}(\mathbb{C}) \times M_{k\times N}(\mathbb{C}) \times M_{N\times k}(\mathbb{C})$$

tali che:

(i)

$$[\alpha_1, \alpha_2] + ba = 0$$

(ii)

$$[\alpha_1, \alpha_1^*] + [\alpha_2, \alpha_2^*] + bb^* - a^*a = 0$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda \\ \alpha_2 + \lambda \\ a \end{pmatrix} \text{ \emph{è una mappa iniettiva} } \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{2k+N} \text{ \emph{per ogni} } \lambda \in \mathbb{C}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} -\alpha_2 - \mu & \alpha_1 + \mu & b \end{pmatrix} \text{ \emph{è una mappa surgettiva} } \mathbb{C}^{2k+N} \to \mathbb{C}^k \text{ \emph{per ogni} } \mu \in \mathbb{C}$$

modulo l'azione del gruppo $U(k)$ data da:

$$(\alpha_1, \alpha_2, a, b) \sim (g\alpha_1 g^{-1}, g\alpha_2 g^{-1}, a g^{-1}, g b)$$

Se si arrangiano queste matrici nella forma di una cosiddetta monade, cioè:

$$K \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ a \end{pmatrix}} K \oplus K \oplus L \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 & b \end{pmatrix}} K$$

dove $\dim_{\mathbb{C}} K = k$ e $\dim_{\mathbb{C}} L = N$, , e utilizzando coordinate affini $(x, 1)$ con $x = z + wj$ per $P_1(\mathbb{H}) - \infty$, è possibile recuperare il fibrato E attraverso la coomologia della monade:

$$E_x \simeq \frac{\ker \begin{pmatrix} -\alpha_2 - \mu & \alpha_1 + \mu & b \end{pmatrix}}{\operatorname{im} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda \\ \alpha_2 + \lambda \\ a \end{pmatrix}}$$

La connessione $\mathcal{A}$ su E è ottenuta proiettando su E la connessione piatta di $\mathbb{R}^4 \times K \oplus K \oplus L$. Indicata con P tale proiezione, la curvatura $\mathcal{F}$ della connessione $\mathcal{A}$ è data da:

$$\mathcal{F} = P \mathrm{d}x \rho^2 \mathrm{d}\bar{x} P$$

con:

$$\rho^2 = [(\alpha_1 - z)^*(\alpha_1 - z) + (\alpha_2 - w)^*(\alpha_2 - w) + a^* a]^{-1}.\mathrm{id}_2.$$

Ad ogni modo la costruzione permette di identificare l'astratto spazio $\hat{\mathcal{M}}_{N,k}$ delle $SU(N)$-connessioni framed (anti-)autoduali su S^4 con la più trattabile sottovarietà di $M_{k\times k}(\mathbb{C}) \times M_{k\times k}(\mathbb{C}) \times M_{k\times N}(\mathbb{C}) \times M_{N\times k}(\mathbb{C})$ selezionata dai *vincoli ADHM* di cui al teorema (2.3.7), modulo l'azione di $U(k)$. In generale, si noti, lo spazio $\hat{\mathcal{M}}_{N,k}$ è singolare (cioè non è una varietà differenziabile, ma un cosiddetto orbifold), a causa del quozientamento rispetto all'azione di $U(k)$. Tuttavia lo spazio degli istantoni non framed $\mathcal{M}_{N,k}$, che abbiamo provato essere una varietà differenziabile, si recupera da $\hat{\mathcal{M}}_{N,k}$ considerando il quoziente $\mathcal{M}_{N,k} = \hat{\mathcal{M}}_{N,k}/SU(N)$ rispetto all'azione di $SU(N)$ data da:

$$h.(\alpha_1, \alpha_2, a, b) := (\alpha_1, \alpha_2, ha, bh^{-1})$$

la quale, appunto, rimuove il framing.

Dal punto di vista fisico, le espressioni delle lagrangiane in termini dei campi di Yang-Mills possono essere tradotte in termini di matrici ADHM opportunamente vincolate. Naturalmente tali lagrangiane non devono dipendere dal framing, di cui i dati ADHM rendono invece conto. In particolare, quando ci si troverà ad integrare sulle configurazioni istantoniche, ciò che ha significato fisico è estendere l'integrazione allo spazio $\mathcal{M}_{N,k}$ degli istantoni *non framed*, perciò, volendo utilizzare i dati ADHM, dovremo ricordare di quozientare rispetto all'azione di $SU(N)$ descritta sopra.

2.3.8 La struttura hyperkähler dello spazio dei moduli

In questo paragrafo ripercorreremo brevemente i passaggi che assegnano allo spazio $\mathcal{M}_{N,k}$ una struttura di varietà hyperkähler, la quale ci è utile nel determinare la misura di integrazione per tale spazio.

Riduzione di Marsden-Weinstein

Il processo di riduzione di Marsden-Weinstein è un metodo generale per indurre una metrica da una varietà riemanniana (V, g) al quoziente $M = V/G$, dove G è un gruppo di Lie che agisce liberamente e transitivamente su M (in tal modo M è varietà differenziabile) per isometrie.

Date le ipotesi, la proiezione canonica $\pi\colon V \to M$ è G-fibrato principale. Per ogni $\xi \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, il generatore infinitesimo ξ^* è un campo vettoriale fondamentale *verticale* sul fibrato V.

Per ogni $x \in V$ la raccolta $\{\xi^*(x)\}_{\xi\in\mathfrak{g}}$ coincide con lo spazio tangente verticale $\mathrm{Vert}_x V$. Se poniamo $\mathrm{Hor}_x V = (\mathrm{Vert}_x V)^\perp$ nella metrica g, la mappa $x \mapsto \mathrm{Hor}_x V$ è G-equivariante e perciò definisce una connessione in V. Denoteremo con C la corrispondente forma di connessione. Abbiamo ora un *operatore di sollevamento orizzontale* associato: per ogni campo vettoriale α su M, il suo sollevamento orizzontale $\tilde{\alpha}$ è l'unico campo vettoriale orizzontale su V che si proietta su α (e perciò G-invariante).

La metrica g induce una metrica $\tilde{g}$ su M, data da:

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

Scriviamo $\tilde{g}$ in componenti. Date coordinate locali $(y^1, \ldots, y^m)$ su M e una base $\{e_a\}_{a=1,\ldots,\dim G}$ per $\mathfrak{g}$ possiamo rappresentare il sollevamento orizzontale nella forma:

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial y^i}} = \frac{\partial}{\partial y^i} - C_i^a e_a^*$$

Tenendo conto che $\{\xi^*(x)\}_{\xi \in \mathfrak{g}}$ coincide con lo spazio tangente verticale, vale la seguente identità:

$$0 = g\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y^i}}, e_a^*\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, e_a^*\right) - C_i^b g(e_b^*, e_a^*)$$

La matrice $g_{ab} = g(e_b^*, e_a^*)$ è invertibile; indicando con g^{ab} gli elementi della matrice inversa, otteniamo:

$$C_i^a = g^{ab} g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, e_a^*\right)$$

Agendo con la metrica g su due elementi sollevati orizzontalmente si ottiene:

$$\tilde{g}ij = g_{ij} - g^{ab} g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, e_a^*\right) g\left(\frac{\partial}{\partial y^j}, e_b^*\right) = g_{ij} - C_i^a C_{aj}$$

Costruzione di quoziente hyperkähler

Sia ora X una varietà hyperkähler di dimensione reale $4n$, con metrica hyperkähler g e strutture complesse J_i, $i = 1, 2, 3$. Siano ω^i le corrispondenti forme di Kähler. Si assuma che un gruppo di Lie G agisca liberamente e transitivamente su X per isometrie di hyperkähler, così che:

$$\mathcal{L}_\xi \omega^i = 0$$

per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$. Segue, supposto che $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$ e tenuto conto che $\mathrm{d}\omega^i = 0$, che esistono $3r$ (dove $r = \dim G$) quantità conservate μ_a^i chiamate *mappe momento*, definite da:

$$i(e_a^*)\omega^i = \mathrm{d}\mu_a^i$$

e per cui indicheremo $\mu_\xi^i = i(\xi^*)\omega^i = \xi^a \mu_a^i$.

Si consideri ora la sottovarietà V di X definita dalle equazioni $\mu_i^a = 0$, così che $\dim V = 4n - 3r$. Il gruppo G agisce liberamente e transitivamente su V, e si ha un quoziente $M = V/G$ di dimensione $4(n - r)$. Ogni struttura complessa su X, compatibile con g, definisce una struttura complessa su M, e, restringendo la metrica g da X a V e applicando il procedimento di riduzione di Marsden-Weinstein per indurre una metrica $\tilde{g}$ su M, si ottiene che M eredita una struttura hyperkähler.

Il caso ADHM

La costruzione di quoziente hyperkähler esposta sopra può essere applicata allo spazio dei moduli nel seguente modo.
Il punto di partenza consiste nell'assegnare allo spazio vettoriale di matrici complesse $M_{k\times k}(\mathbb{C})\times M_{k\times k}(\mathbb{C})\times M_{k\times N}(\mathbb{C})\times M_{N\times k}(\mathbb{C})$, la struttura hyperkähler tipica di $\mathbb{C}^{2k^2+2Nk}$, a cui esso è isomorfo. Tale struttura, si ricordi, si ottiene ponendo:

$$g = \sum_{\alpha=1}^{2k^2+2Nk} \mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\alpha + \mathrm{d}x^{\alpha+1} \otimes \mathrm{d}x^{\alpha+1}$$

dove $z^\alpha = x^\alpha + \mathrm{i}x^{\alpha+1}$ per ogni $(z^1, \ldots, z^{2k^2+2Nk}) \in \mathbb{C}^{2k^2+2Nk}$, fissando, per le forme di kähler:

$$\omega^1 := \omega^{\mathbb{R}} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{2k^2+2Nk} \mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\alpha$$

$$\omega^2 + \mathrm{i}\omega^3 := \omega^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha=1}^{k^2+Nk} \mathrm{d}z^{2\alpha-1} \wedge \mathrm{d}z^{2\alpha}$$

rispettivamente di tipo $(1,1)$ e $(2,0)$. In termini di matrici ADHM, si ha:

$$\omega^{\mathbb{C}} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}\alpha_1 \wedge \mathrm{d}\alpha_2 + \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b$$

$$\omega^{\mathbb{R}} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}\alpha_1 \wedge \mathrm{d}\alpha_1^\dagger + \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}\alpha_2 \wedge \mathrm{d}\alpha_2^\dagger + \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a^\dagger - \mathrm{Tr}\ \mathrm{d}b^\dagger \wedge \mathrm{d}b$$

L'azione del gruppo $SU(N) \times U(k)$ data da:

$$(h,g).(\alpha_1, \alpha_2, a, b) = (g\alpha_1 g^{-1}, g\alpha_2 g^{-1}, gah^{-1}, hbg^{-1})$$

lascia $\omega^{\mathbb{C}}$ e $\omega^{\mathbb{R}}$ invarianti, cioè $SU(N)\times U(k)$ agisce per isometrie hyperkähler. Le mappe momento di tale azione sono date, in notazione ovvia, da:

$$\mu^{\mathbb{C}} = [\alpha_1, \alpha_2] + ab$$

$$\mu^{\mathbb{R}} = [\alpha_1, \alpha_1^\dagger] + [\alpha_2, \alpha_2^\dagger] + aa^\dagger - b^\dagger b$$

L'imposizione $\mu^{\mathbb{C}} = \mu^{\mathbb{R}} = 0$ è quella tipica dei dati ADHM e seleziona una sottovarietà $\mathcal{N}_{N,k}$ di $\mathbb{C}^{2k^2+2Nk}$ che ha dimensione reale $k^2 + 4Nk$ e su cui $SU(N) \times U(k)$ agisce liberamente e transitivamente, poichè sappiamo che $\mathcal{M}_{N,k} = \mathcal{N}/SU(N)\times U(k)$ è varietà differenziabile (di dimensione $4Nk - N^2$). Pertanto è possibile applicare ivi la costruzione di quoziente hyperkähler facendo scendere a $\mathcal{M}_{N,k}$ la struttura hyperkähler di $\mathbb{C}^{2k^2+2Nk}$.

Esiste un naturale potenziale di Kähler per le forme di Kähler così ottenute, dato dalla norma al quadrato delle matrici:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Come mostrato in [29], la struttura di hyperähler che, in tal modo, si è assegnata allo spazio dei moduli $\mathcal{M}_{N,k}$ coincide con quella indotta nel seguente modo su tale spazio direttamente dalla struttura hyperkähleriana dello spazio-tempo $\mathbb{R}^4$. Dapprima si assegnino a $\mathcal{M}_{N,k}$ strutture complesse $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ ereditate in maniera banale da I_1, I_2, I_3 di $\mathbb{R}^4$ (esse agiscono sulle forme $\alpha \in \Omega^1_{\mathbb{R}^4} \otimes \mathrm{ad}(P)$, e scendono alle classi di equivalenza di gauge). Dopodichè si scelgano le forme di Kähler Ω_i, $i = 1, 2, 3$ indotte dalle forme di Kähler spazio-temporali ω_i attraverso l'imposizione:

$$\Omega_i(u, v) = \frac{1}{2\pi^2} \int \mathrm{tr}(u \wedge v) \wedge \omega_i$$

per ogni $u, v \in \mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k}$. La metrica di Kähler resta, a questo punto, determinata dall'imposizione $\Omega_i(u, v) = g(\tilde{I}u, v)$.

2.4 Istantoni e teorie Super Yang-Mills

In questa sezione richiameremo, seguendo [38][39][18] e senza un alcuna pretesa di completezza, alcuni aspetti di base della supersimmetria, ed in particolare delle teorie di gauge supersimmetriche. Inizieremo con l'esporre le nostre convenzioni notazionali, per poi passare ad una descrizione delle rappresentazioni dell'algebra della supersimmetria (in assenza di cariche centrali). Quindi presenteremo le lagrangiane di $\mathcal{N} = 1$ SYM e $\mathcal{N} = 2$ SYM per i campi di (super) Yang-Mills. Infine considereremo come il calcolo istantonico trovi applicazione anche nell'ambito della supersimmetria.

2.4.1 Convenzioni

La nostra analisi si ambienterà in uno spazio-tempo piatto con segnatura pseudo-euclidea $(+ - --)$. Gli spinori del gruppo di Lorentz hanno indici non puntati o puntati a seconda che $SL(2, \mathbb{C})$ agisca su di essi tramite la rappresentazione banale $D^{(0,\frac{1}{2})}(A) = A$ o la $D^{(\frac{1}{2},0)}(A) = A^{*-1}$. In particolare, per le leggi di trasformazione sotto l'azione di $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta \qquad , \qquad \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = M^*{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}$$

dove con M^* si indica l'aggiunta di M rispetto al prodotto scalare in $\mathbb{C}^2$.
Naturalmente, qualora sia necessario considerare uno spazio-tempo con segnatura euclidea, basterà pensare agli indici puntati e non come relativi all'uno o all'altro dei sottospazi invarianti della rappresentazione di spin dell'algebra di Clifford di $SO(4)$ (ognuno dei quali si trasforma con una delle copie di $SU(2)$ in $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ in rappresentazione identica).
Inoltre l'azione della matrice:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathrm{i}\sigma_2)$$

invariante sotto $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = (M^t \epsilon M)^{\alpha\beta} = M^\alpha{}_\gamma \epsilon^{\gamma\delta} M_\delta{}^\beta$$

alza e abbassa gli indici spinoriali puntati e non, così che:

$$\psi'^\alpha = \psi^\beta (M^{-1})_\beta{}^\alpha \qquad , \qquad \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\beta}} (M^*)^{-1}{}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}}$$

Definiamo ora:

$$(\sigma^0)_{\alpha\dot{\alpha}} := 1_{2\times 2}$$
$$(\sigma^1)_{\alpha\dot{\alpha}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\sigma^2)_{\alpha\dot{\alpha}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\sigma^3)_{\alpha\dot{\alpha}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Possiamo alzare e abbassare gli indici di σ^μ con ϵ e definiamo:

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} := -(\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\alpha\beta} (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}$$

che porta a:

$$(\bar{\sigma}^0)^{\dot{\alpha}\alpha} = (\sigma^0)_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad , \qquad (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\alpha} = -(\sigma^i)_{\alpha\dot{\alpha}} \quad i = 1, 2, 3$$

Con queste convenzioni, le trasformazioni di Lorentz sono generate da:

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4} [(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\beta} - (\mu \leftrightarrow \nu)]$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{4} [(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\beta}} - (\mu \leftrightarrow \nu)]$$

Per i prodotti scalari di spinori usiamo le seguenti convenzioni:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi$$

$$\bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi$$

$$(\psi\chi)^\dagger = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi = \bar\psi\bar\chi$$

Nelle basi scelte sopra le matrici di Dirac e gli spinori di Dirac e Majorana sono dati da:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar\psi^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

Come d'uso si definisce $\gamma^5 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Si consideri un fermione massless che si muova lungo l'asse z. Allora $P^\mu = E(1,0,0,1)$ e l'equazione di Dirac dà $(\gamma^0 - \gamma^3)\psi = 0$. Poichè l'operatore elicità è ora $J_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^1\gamma^2$, si ha $J_3\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi = -\frac{1}{2}\gamma^5\psi$. Perciò i sottospazi a chiralità positiva coincidono con i sottospazi ad elicità negativa e viceversa.

2.4.2 Algebra della supersimmetria senza cariche centrali

In termini euristici, la supersimmetria è una simmetria della natura (cioè delle lagrangiane) consistente nell'invarianza per trasformazioni che portano bosoni in fermioni e viceversa. Essa si aggiunge alle note simmetrie ordinarie, di Lorentz e interne, ma, con esse, non forma un gruppo di Lie (forma invece un supergruppo, ma non svilupperemo questo punto di vista). In particolare i generatori delle trasformazioni di supersimmetria, unitamente all'algebra di Lie dei generatori delle trasformazioni ordinarie, formano un'algebra di Lie $\mathbb{Z}_2$-gradata, detta anche superalgebra. Nel seguito considereremo un caso di supersimmetria particolare, detto senza cariche centrali come spiegheremo tra breve.

L'algebra della supersimmetria si scrive come:

$$\begin{aligned} &\{Q^I_\alpha, \bar Q_{\dot\alpha J}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}P_\mu\delta^I_J \\ &\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = \{\bar Q_{\dot\alpha I}, \bar Q_{\dot\beta J}\} = 0 \\ \\ &[Q^I_\alpha, P^\mu] = 0 \\ &[Q^I_\alpha, J^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^I_\beta \end{aligned} \tag{2.47}$$

dove gli indici $I, J = \ldots, \mathcal{N}$ e $\mathcal{N}$ è il numero totale di supersimmetrie.

Affinchè una teoria sia supersimmetrica è necessario che il suo contenuto in particelle formi una rappresentazione dell'algebra di cui sopra. Si noti che, giacchè i generatori supersimmetria commutano con l'impulso P^μ, e perciò anche con P^2, tutti gli stati in una data rappresentazione dell'algebra di supersimmetria avranno la stessa massa di riposo.

Nel seguito focalizzeremo l'attenzione su teorie supersimmetriche con particelle a massa nulla. A tal fine studiamo le rappresentazioni dell'algebra supersimmetrica in questo caso particolare.
Per stati massless è sempre possibile scegliere una sistema di riferimento in cui l'impulso assume la forma $P^\mu = M(1,0,0,1)$. L'algebra della supersimmetria diventa allora:

$$\{Q^I_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}J}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4M \end{pmatrix} \delta^I_J$$

Ora, poichè la norma di uno stato è sempre positiva, poichè Q_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ sono l'uno il coniugato dell'altro e poichè $\{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 0$, segue che $Q_1\psi = \bar{Q}_{\dot{1}}\psi = 0$ per ogni stato fisico ψ.
Per quanto riguarda gli altri generatori, è conveniente riscalarli come:

$$a^I = \frac{1}{2\sqrt{M}} Q^I_2 \qquad , \qquad (a^I)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{M}} \bar{Q}^I_{\dot{2}}$$

Allora l'algebra della supersimmetria prende la forma:

$$\{a^I, (a^J)^\dagger\} = \delta^I_J \quad , \quad \{a^I, a^J\} = \{(a^I)^\dagger, (a^J)^\dagger\} = 0$$

cioè un'algebra di Clifford con $2N$ generatori, che possiede quindi una rappresentazione 2^N-dimensionale.
A questo punto è anche facile convincersi che tale algebra realizza la trasformazione di bosoni in fermioni cui si accennava. In effetti, considerati a^I ed $(a^J)^\dagger$ come operatori di creazione e distruzione e scelto uno stato di vuoto tale che $J_3|\Omega_\lambda\rangle = \lambda|\Omega_\lambda\rangle$ e $a^I|\Omega_\lambda\rangle = 0$ per tutti gli I, si ha:

$$J_3[(a^I)^\dagger]^m|\Omega_\lambda\rangle = (\lambda - \frac{m}{2})|\Omega_\lambda\rangle$$

E' quindi facile a questo punto fornire qualche esempio, per bassi valori di $\mathcal{N}$, di rappresentazioni dell'algebra della supersimmetria, opportunamente allargata affinchè sia anche rappresentazione delle trasformazioni CPT:

$$\begin{array}{llllllll}
\mathcal{N}=1, & \lambda=\frac{1}{2} & : & |1/2\rangle, & |0\rangle, & |-1/2\rangle, & |0\rangle & \\
 & \lambda=1 & : & |1\rangle, & |1/2\rangle, & |-1\rangle, & |-1/2\rangle & \\
\mathcal{N}=2, & \lambda=\frac{1}{2} & : & |1/2\rangle, & 2|0\rangle, & |-1/2\rangle & |-1/2\rangle, & 2|0\rangle, \quad |1/2\rangle \\
 & \lambda=1 & : & |1\rangle, & 2|1/2\rangle, & |0\rangle, & |-1\rangle, & 2|-1/2\rangle, \quad |0\rangle \\
\mathcal{N}=4, & \lambda=1 & : & |1\rangle, & 4|1/2\rangle, & 6|0\rangle, & 4|-1/2\rangle, & |-1\rangle
\end{array} \tag{2.48}$$

In maniera del tutto simile è possibile ricavare le rappresentazioni massive dell'algebra della supersimmetria. Senza scendere nei dettagli, per stati massivi sarà sempre possibile scegliere il riferimento di quiete della particella, in cui $P^\mu = (M, 0, 0, 0)$, e definire:

$$a^I_\alpha = \frac{Q^I_\alpha}{\sqrt{2M}} \qquad , \qquad (a^I_{\dot{\alpha}})^\dagger = \frac{\bar{Q}_{\dot{\alpha} I}}{\sqrt{2M}}$$

Allora l'algebra di supersimmetria si riduce a:

$$\{a^I_1, (a^J_1)^\dagger\} = \delta^{IJ} \qquad , \qquad \{a^I_2, (a^J_2)^\dagger\} = \delta^{IJ}$$

con tutti gli altri anti-commutatori nulli.
Il vuoto di Clifford è definito da $a^I_\alpha|\Omega\rangle = 0$ e la rappresentazione è costruita applicando al vuoto gli operatori di creazione $(a^I_\alpha)^\dagger$.

2.4.3 Teorie di gauge supersimmetriche

In questo paragrafo presentiamo i due di teorie di pura gauge supersimmetriche di interesse per il seguito: $\mathcal{N} = 1$ e $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills (SYM). Una costruzione sistematica di lagrangiane supersimmetriche può essere operata nel formalismo dei supercampi, per cui si veda, ad esempio, [WeBa]. Tuttavia noi ci limiteremo ad esibire le lagrangiane e le corrispondenti trasformazioni infinitesime di supersimmetria sui campi coinvolti (seguendo notazioni e convenzioni di [40]). L'effettiva invarianza sotto tali trasformazioni sarà di verifica immediata.
Come suggerisce il nome, $\mathcal{N} = 1$ e $\mathcal{N} = 2$ SYM sono due naturali estensioni supersimmetriche delle teorie di gauge di Yang-Mills interagenti con fermioni di cui già parlammo al paragrafo (2.3.2). Con l'obiettivo di sviluppare una teoria basata sugli integrali di cammino, passiamo d'ora in poi ad uno spazio tempo con metrica euclidea $(++++)$.

$\mathcal{N} = 1$ SYM

Per quanto riguarda il caso $\mathcal{N} = 1$, sappiamo, dalla tabella (2.48) del paragrafo precedente, che il contenuto in campi di una teoria massless in cui sia presente un vettore (di gauge) prevede anche uno spinore. Noi abbiamo in particolare un bosone vettoriale di gauge $\mathcal{A}$ descritto come connessione del fibrato vettoriale $P(\mathbb{R}^4, SU(N))$ e un fermione spinoriale di Majorana λ (detto gaugino) descritto come sezione del fibrato vettoriale (associato a $P(\mathbb{R}^4, SU(N))$) $S_+(\mathbb{R}^4) \otimes \mathrm{ad}(P)$. La densità lagrangiana minimale, senza multipletti extra, è:

$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathrm{i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\lambda^\alpha\right) \qquad (2.49)$$

La supersimmetria agisce sui campi con le seguenti trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\mu &= -\mathrm{i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\eta^\alpha + \mathrm{i}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^\alpha \\ \delta\lambda_\alpha &= (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\eta^\beta\mathcal{F}_{\mu\nu} \\ \delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= (\sigma^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}}\mathcal{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.50}$$

dove gli η^I_α e gli $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}I}$ sono i parametri infinitesimi della trasformazione.
Infine le equazioni di Eulero-Lagrange derivanti da questa densità lagrangiana sono:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}\{\lambda^\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\} \\ &(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\lambda^\alpha = 0 \\ &(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

ma, poichè, come mostrato all'interno della prova del teorema (2.3.1), l'ultima di esse possiede solo la soluzione banale nulla, esse si riscrivono:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \\ &(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\lambda^\alpha = 0 \\ &\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

$\mathcal{N} = 2$ SYM

Similmente a quanto visto nel caso $\mathcal{N} = 1$, ci facciamo guidare dalla tabella (2.48) per determinare il contenuto in campi della teoria di gauge supersimmetrica con $\mathcal{N} = 2$. Dovremo pertanto considerare una teoria non massiva che coinvolge un bosone di gauge vettoriale $\mathcal{A}$ (connessione in $P(\mathbb{R}^4, SU(N))$), due spinori λ^I $(I = 1, 2)$ in rappresentazione aggiunta (sezioni di $S_+(\mathbb{R}^4) \otimes \mathrm{ad}(P)$), e uno scalare complesso ϕ, anch'esso in rappresentazione aggiunta (sezione di $\mathrm{ad}(P)$).
La densità lagrangiana per tale teoria minimale è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathrm{tr}\bigg(&-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathrm{i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_I(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\lambda^{\alpha I} - \mathcal{D}_\mu\phi^\dagger\mathcal{D}^\mu\phi \\ &-\frac{1}{2}[\phi^\dagger, \phi]^2 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\epsilon_{IJ}[\lambda^{\alpha I}, \lambda^J_\alpha] + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\phi\epsilon^{IJ}[\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}I}, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_I]\bigg) \end{aligned} \tag{2.53}$$

L'azione infinitesima della supersimmetria sui campi è data da:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\mu &= -\mathrm{i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_I(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\eta^{\alpha I} + \mathrm{i}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}_I(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\alpha I} \\ \delta\lambda^I_\alpha &= (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\eta^{\beta I}\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathrm{i}\eta^I_\alpha[\phi, \phi^\dagger] + \mathrm{i}\sqrt{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\phi\epsilon^{IJ}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}_J \\ \delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}I} &= (\sigma^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}}_I\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathrm{i}\bar{\eta}_{\dot{\alpha}I}[\phi, \phi^\dagger] + \mathrm{i}\sqrt{2}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_\mu\phi^\dagger\epsilon_{IJ}\eta^{\alpha J} \\ \delta\phi &= \sqrt{2}\eta^{\alpha I}\lambda_{\alpha I} \\ \delta\phi^\dagger &= \sqrt{2}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}_I\bar{\lambda}^I_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Inoltre, questa teoria gode di un'altra importante simmetria che deriva dal fatto che le due cariche di supersimmetria giocano in essa un ruolo in qualche modo paritario. In particolare si nota subito che l'algebra della supersimmetria è invariante sotto l'azione di $SU(2)$ sulle cariche definita da:

$$(g.Q_\alpha)^I = g^I_J Q^J_\alpha \qquad , \qquad (g.\bar{Q}_{\dot\alpha})^I = g^I_J \bar{Q}^J_{\dot\alpha}$$

Questa simmetria è ereditata dalla nostra lagrangiana quando questa azione è scaricata sui campi. Abbiamo così una teoria invariante sotto il gruppo $H = \mathrm{Spin}(4) \times SU(2)_I = SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I$, oltre naturalmente al gruppo di gauge $\mathcal{G}$ e alla supersimmetria. Infine le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 2[\phi, \mathcal{D}^\nu \phi] + 2(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\alpha}\{\bar\lambda^{\dot\alpha}_I, \lambda^{\alpha I}\} \\
&(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_\mu \lambda^{\alpha I} = \sqrt{2}[\phi, \bar\lambda^I_{\dot\alpha}] \\
&(\bar\sigma^\mu)_{\dot\alpha\alpha}\mathcal{D}_\mu \bar\lambda^{\dot\alpha I} = \sqrt{2}[\phi^\dagger, \lambda^I_\alpha] \\
&\mathcal{D}^2\phi = [\phi^\dagger, [\phi^\dagger, \phi]] + \sqrt{2}[\lambda^{\alpha I}, \lambda_{\alpha I}] \\
&\mathcal{D}^2\phi^\dagger = [\phi, [\phi, \phi^\dagger]] + \sqrt{2}[\bar\lambda^{\dot\alpha}_I, \bar\lambda^I_{\dot\alpha}]
\end{aligned} \tag{2.55}$$

2.4.4 La procedura di twist per $\mathcal{N} = 2$ SYM

Come abbiamo fatto notare nel precedente paragrafo la teoria $\mathcal{N} = 2$ SYM possiede il gruppo di simmetrie globali $H = SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I$. Le supercariche Q^I_α e $\bar{Q}_{\dot\alpha I}$ si trasformano sotto H attraverso le rappresentazioni $(1/2, 0, 1/2)$ e $(0, 1/2, 1/2)$, rispettivamente. Naturalmente qualunque sottogruppo di H è ancora una simmetria della teoria. Consideriamo allora il sottogruppo $K = SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \simeq \mathrm{Spin}(4)$ dove $SU(2)_{R'}$ è il sottogruppo diagonale di $SU(2)_R \times SU(2)_I$.
Possiamo persino pensare che K sia in realtà l'azione del gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^4$ e così i campi assumono un diverso significato, cambiando il senso delle loro leggi di trasformazione, e chiameremo una tale teoria col nome di $\mathcal{N} = 2$ SYM *twistata*. Indipendentemente da questo cambio di ottica (twist appunto), se si restringono le possibili trasformazioni da H a K, le rappresentazioni di cui fanno parte campi e cariche di SUSY, che, come rappresentazioni di H erano irriducibili, come rappresentazioni di K diventano riducibili.
In particolare, per le rappresentazioni cui appartengono le supercariche:

$$\begin{aligned}
&Q : (1/2, 0, 1/2) \text{ di } H \qquad \longrightarrow \qquad (1/2, 1/2) \text{ di } K \\
&\bar{Q} : (0, 1/2, 1/2) \text{ di } H \qquad \longrightarrow \qquad (0, 1/2 \oplus 1/2) = (0, 0) \oplus (0, 1) \text{ di } K
\end{aligned}$$

che corrisponde alla ridefinizione delle cariche:

$$\begin{array}{rcl} Q^I_\alpha & \longrightarrow & Q_\mu \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}I} & \longrightarrow & Q + Q_{\mu\nu} \end{array}$$

Similmente accade per i campi:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\mu & \longrightarrow & \mathcal{A}_\mu \\ \lambda^I_\alpha & \longrightarrow & \lambda_\mu \\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}I} & \longrightarrow & \bar{\lambda} + \bar{\lambda}_{\mu\nu} \\ \phi & \longrightarrow & \phi \end{array}$$

E' particolarmente interessante restringere l'attenzione alle sole trasformazioni di supersimmetria generate dalla carica scalare Q. Esse si selezionano scegliendo parametri infinitesimi:

$$\eta^{\alpha\dot{\beta}} = 0 \qquad , \qquad \bar{\eta}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\rho$$

dove, coerentemente con quanto detto, si è rinominato l'indice I con $\dot{\beta}$, e che danno trasformazioni infinitesime dei campi:

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{A}_\mu = \mathrm{i}\rho(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\lambda^{\alpha\dot{\beta}} \\ &\delta\lambda_{\alpha\dot{\beta}} = \mathrm{i}\rho\sqrt{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{D}_\mu\phi \\ &\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \rho(\sigma^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathrm{i}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\rho[\phi, \phi^\dagger] \\ &\delta\phi = 0 \\ &\delta\phi^\dagger = -\sqrt{2}\rho\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{aligned} \tag{2.56}$$

che, in termini dei campi con componenti ridefinite come sopra, diventano:

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{A}_\mu = \mathrm{i}\rho\lambda_\mu \\ &\delta\lambda_\mu = -\mathrm{i}2\sqrt{2}\rho\mathcal{D}_\mu\phi \\ &\delta\bar{\lambda}_{\mu\nu} = 2\rho\mathcal{F}_{\mu\nu} \\ &\delta\bar{\lambda} = \mathrm{i}\rho[\phi, \phi^\dagger] \\ &\delta\phi = 0 \\ &\delta\phi^\dagger = -\sqrt{2}\rho\bar{\lambda} \end{aligned} \tag{2.57}$$

L'operatore Q, si noti, è nilpotente a meno di una trasformazione di gauge infinitesima di parametro ϕ, avendosi:

$$\delta^2\mathcal{A}_\mu = 2\sqrt{2}\rho^2\mathcal{D}_\mu\phi \tag{2.58}$$

2.4.5 Da $\mathcal{N}=2$ SYM twistata a $\mathcal{N}=1$ SYM

E' facile capire che, dalla teoria $\mathcal{N}=2$, è possibile recuperare una teoria che abbia una sola supersimmetria rompendo, in qualche modo, l'altra supersimmetria. Questo può essere effettuato, ad esempio, aggiungendo un termine di massa per uno dei due gaugini. L'effetto, comunque, è quello di ottenere una teoria non più invariante per trasformazioni generate da una delle due cariche di supersimmetria. Per fissare le idee supponiamo di rompere la simmetria generata da Q^2_α e mantenere quella generata da Q^1_α. Questo naturalmente impedisce di operare la procedura di twist descritta al paragrafo precedente e non permette di trovare una supersimmetria scalare come Q. Tuttavia è possibile (si veda [40]) adottare un'ottica differente e ottenere, sotto diverse ipotesi, una carica di supersimmetria scalare che emerga dalla sola Q^1_α.
L'ipotesi fondamentale adottata nel seguito è che lo spazio-tempo sia una varietà, il cui gruppo di olonomia abbia come gruppo di ricoprimento universale il gruppo $SU(2)_L \times U(1)_R$, con $U(1)_R \subset SU(2)_R$ (sia cioè una varietà di Kähler). In tal modo, gli spinori si trasformeranno attraverso una sua rappresentazione di $SU(2)_L \times U(1)_R$. Consideriamo la teoria $\mathcal{N}=2$ SYM e il suo twist esattamente come fatto in precedenza (ci è possibile poichè $SU(2)_L \times U(1)_R \subset SU(2)_L \times SU(2)_R$). Ora, però, la rappresentazione 2-dimensionale identica di $SU(2)_R$, a cui appartengono gli spinori con indici puntati, si spezza in due rappresentazioni 1-dimensionali (di spin $\pm\frac{1}{2}$), caratterizzate dal valore 1 o 2 dell'indice puntato. In tal modo la carica Q, scalare rispetto a $SU(2)_L \times SU(2)_R$, che si scrive:

$$Q = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}} = \bar{Q}_{\dot{1}}{}^{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{2}}{}^{\dot{2}} := Q_1 + Q_2$$

risulta somma di due cariche Q_1 e Q_2, scalari rispetto a $SU(2)_L \times U(1)_R$. In termini dei parametri infinitesimi questo si scrive:

$$\begin{array}{lllll} Q_1 : & \eta^{\alpha\dot{\beta}} = 0 & , \; \bar{\eta}^{\dot{\alpha}\dot{1}} = \rho\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{1}} & , \; \bar{\eta}^{\dot{\alpha}\dot{2}} = 0 \\ Q_2 : & \eta^{\alpha\dot{\beta}} = 0 & , \; \bar{\eta}^{\dot{\alpha}\dot{1}} = 0 & , \; \bar{\eta}^{\dot{\alpha}\dot{2}} = \rho\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{2}} \end{array}$$

Attuato questo spezzamento di Q, è possibile procedere alla rottura della supersimmetria scalare Q_2 aggiungendo alla densità lagrangiana un termine di massa per il fermione $\lambda_\alpha{}^{\dot{2}}$. Sopravvive allora la sola supersimmetria generata dalla carica scalare $Q_1 = \bar{Q}_{\dot{1}}{}^{\dot{1}}$.
Un'ultima nota riguarda il metodo in cui si recupera la struttura complessa della varietà kähleriana M. A tal fine è sufficiente dichiarare semplicemente che le 1-forme $\mathrm{d}x^\mu(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{2}}$ sono di tipo $(0,1)$, mentre le 1-forme $\mathrm{d}x^\mu(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{1}}$ sono di tipo $(1,0)$.
Forse con un lieve abuso di linguaggio, ci riferiremo a questa teoria come $\mathcal{N}=1$ SYM twistata.

La supersimmetria infinitesima generata da Q_1 agisce sui campi come segue:

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{A}_\mu = \mathrm{i}\rho(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{1}}\lambda^{\alpha\dot{1}}\\
&\delta\lambda_{\alpha\dot{1}} = \mathrm{i}\sqrt{2}\rho(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{1}}\mathcal{D}_\mu\phi\\
&\delta\lambda_{\alpha\dot{2}} = 0\\
&\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}\dot{1}} = \rho((\sigma^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{1}}\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathrm{i}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{1}}[\phi,\phi^\dagger])\\
&\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}\dot{2}} = 0\\
&\delta\phi = 0\\
&\delta\phi^\dagger = -\sqrt{2}\rho\bar{\lambda}_{\dot{1}\dot{2}}
\end{aligned}\tag{2.59}$$

2.5 Localizzazione di $\mathcal{N}=2$ SYM

2.5.1 Moduli bosonici e fermionici per $\mathcal{N}=2$ SYM

In questa sezione esamineremo come si configuri il calcolo istantonico nell'ambito delle teorie di gauge supersimmetriche. L'idea dell'approssimazione semiclassica resta naturalmente quella, già presentata, di eseguire l'integrazione funzionale per la funzione di partizione, riducendola ad un'integrazione sulle configurazioni classiche di minima azione e sulle oscillazioni attorno a tali configurazioni. Operiamo preliminarmente la compattificazione dello spazio-tempo $\mathbb{R}^4$ alla sfera S^4 propria del calcolo istantonico.
La nostra analisi sarà ristretta, per ora, al caso $\mathcal{N}=2$ SYM twistato, poichè esso è, come si vedrà, in qualche modo più naturale. Un primo passo, e un'ulteriore approssimazione, consiste nel considerare, come configurazioni classiche, le soluzioni approssimate, ai primi ordini nella costante di accoppiamento (vedi paragrafo (2.3.2)), delle equazioni del moto (2.55). Sotto tale approssimazione le equazioni del moto si riducono a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0\\
&(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\lambda^{\alpha\dot{\beta}} = 0\\
&\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda} = \sqrt{2}[\phi^\dagger,\lambda_\mu]\\
&\mathcal{D}^2\phi^\dagger = \sqrt{2}[\bar{\lambda},\bar{\lambda}]\\
&\mathcal{D}^2\phi = \sqrt{2}[\lambda_\mu,\lambda^\mu]\\
&\bar{\lambda}_{\mu\nu} = 0
\end{aligned}\tag{2.60}$$

In tal modo i campi in gioco si riducono a $\mathcal{A}_\mu$, $\lambda_{\alpha\dot{\beta}}$ ($\leftrightarrow \lambda_\mu$), $\bar{\lambda}$, ϕ e $\phi^\dagger$. Inoltre facciamo un'osservazione fondamentale a proposito delle equazioni (2.60):

1. Le configurazioni classiche del bosone di gauge $\mathcal{A}$ possono trovarsi, nel modo usuale,

come istantoni (condizioni di (anti-)autodualità) e sono perciò parametrizzate dallo spazio dei moduli istantonici $\mathcal{M}_N$, ovvero, fissata la carica topologica k, dallo spazio $\mathcal{M}_{N,k}$.

2. Le configurazioni classiche del fermione (gaugino) λ appartengono al nucleo dell'-operatore di Dirac twistato:

$$\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu = D\colon \Gamma(S_+(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(S_-(M) \otimes S_-(M) \otimes \mathrm{ad}(P))$$

dove, si noti, la connessione di spin è piatta perchè tale è quella dello spaziotempo. Come mostrato nella prova del teorema (2.3.1), tali configurazioni sono parametrizzate dallo spazio tangente, nel punto $\mathcal{A}$, allo spazio dei moduli $\mathcal{M}_N$, ovvero, fissata la carica topologica k, dallo spazio $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{N,k}$.

Questo mostra come le configurazioni del bosone di gauge e del gaugino siano entrambe determinate fissando un elemento nel fibrato indice:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ind}\ (D : \mathcal{M}_{N,k} \to \mathsf{F}) = \mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k} \otimes \mathbb{C} \\ &= \ker\ (D\colon \Gamma(S_+(S^4) \otimes S_-(S^4) \otimes \mathrm{ad}(P)) \to \Gamma(S_-(S^4) \otimes S_-(S^4) \otimes \mathrm{ad}(P))) \end{aligned}$$

Come già visto, l'uso dei dati ADHM costituisce un buon metodo per implementare la coordinatizzazione dello spazio $\mathcal{M}_{N,k}$. Tale metodo può essere facilmente esteso per coordinatizzare l'intero fibrato $\mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k}$. Infatti, se i dati ADHM ordinari (bosonici) fissano un punto $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}_{N,k}$, resta da fissare l'elemento della fibra $\pi^{-1}(\mathcal{A})$, che essendo lo spazio tangente o, equivalentemente, grazie alla metrica, lo spazio cotangente, può essere parametrizzato con una versione linearizzata dei dati ADHM (dati ADHM fermionici) costituiti dallo spazio generato dalle (matrici di) 1-forme $(\mu_1, \mu_1^\dagger, \mu_2, \mu_2^\dagger, p, p^\dagger, q, q^\dagger)$ definite come:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \mathrm{d}\alpha_1 \quad \mu_2 = \mathrm{d}\alpha_2 \quad p = \mathrm{d}a \quad q = \mathrm{d}b \\ &\mu_1^\dagger = \mathrm{d}\alpha_1^\dagger \quad \mu_2^\dagger = \mathrm{d}\alpha_2^\dagger \quad p^\dagger = \mathrm{d}a^\dagger \quad q^\dagger = \mathrm{d}b^\dagger \end{aligned} \tag{2.61}$$

(si noti che, se $(\alpha_1, \alpha_2, a, b)$ soddisfano ai vincoli ADHM, allora questo è vero anche per $(\alpha_1^\dagger, \alpha_2^\dagger, b^\dagger, a^\dagger)$) e soddisfacenti alla versione linearizzata dei vincoli ADHM (vincoli che indicheremo d'ora in poi con $V^{\mathbb{C}}(\alpha_1, \alpha_2, a, b) = V^{\mathbb{R}}(\alpha_1, \alpha_2, a, b) = 0$), scritta simbolicamente come:

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} &= \frac{\partial V^{\mathbb{C}}}{\partial \alpha_1}\mu_1 + \frac{\partial V^{\mathbb{C}}}{\partial \alpha_2}\mu_2 + \frac{\partial V^{\mathbb{C}}}{\partial a}p + \frac{\partial V^{\mathbb{C}}}{\partial b}q + \mathrm{h.c.} = 0 \\ W^{\mathbb{R}} &= \frac{\partial V^{\mathbb{R}}}{\partial \alpha_1}\mu_1 + \frac{\partial V^{\mathbb{R}}}{\partial \alpha_2}\mu_2 + \frac{\partial V^{\mathbb{R}}}{\partial a}p + \frac{\partial V^{\mathbb{R}}}{\partial b}q + \mathrm{h.c.} = 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

modulo l'usuale azione del gruppo $U(k)$.

2.5.2 Il calcolo della funzione di partizione di $\mathcal{N}=2$ SYM

Siamo ora pronti al calcolo della funzione di partizione. In tal modo, scritti i campi come in termini di configurazioni di minima azione e piccole oscillazioni attorno ad esse:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}^{\text{cl}} + \delta\mathcal{A} \\
\lambda &= \lambda^{\text{cl}} + \delta\lambda \\
\bar{\lambda} &= \bar{\lambda}^{\text{cl}} + \delta\bar{\lambda} \\
\phi^\dagger &= {\phi^\dagger}^{\text{cl}} + \delta\phi^\dagger \\
\phi &= \phi^{\text{cl}} + \delta\phi
\end{aligned}$$

l'azione assume la forma:

$$\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}^{\text{cl}} + \tilde{\mathcal{S}} = 8\pi^2 k + \tilde{\mathcal{S}}^{\text{cl}} + \tilde{\mathcal{S}}$$

dove si è isolato e integrato il termine $-\frac{1}{4}(\mathcal{F}^{\text{cl}})_{\mu\nu}(\mathcal{F}^{\text{cl}})^{\mu\nu}$ della lagrangiana. Il calcolo della funzione di partizione nell'approssimazione semiclassica consiste pertanto in:

$$Z \simeq \int [\mathcal{D}\phi] \int_{\mathcal{M}_{N,k}} \mu(\mathcal{M}_{N,k}) \frac{\partial}{\partial\lambda} \int [\mathcal{D}\bar{\lambda}^{\text{cl}}][\mathcal{D}{\phi^\dagger}^{\text{cl}}][\mathcal{D}\delta\phi][\mathcal{D}\delta\mathcal{F}][\mathcal{D}\delta\lambda][\mathcal{D}\delta\bar{\lambda}][\mathcal{D}\delta\phi^\dagger]\ \mathrm{e}^{-8\pi^2 k - \tilde{\mathcal{S}}^{\text{cl}} - \tilde{\mathcal{S}}} \tag{2.63}$$

dove si è ricordato che l'integrazione su variabili fermioniche anticommutanti consiste in sostanza in una derivazione, e si è indicato con $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ la derivazione appunto rispetto a tutte le variabili fermioniche dello spazio $\mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k}$.
Posto ora:

$$\mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}} := \int [\mathcal{D}\bar{\lambda}^{\text{cl}}][\mathcal{D}{\phi^\dagger}^{\text{cl}}][\mathcal{D}\delta\phi][\mathcal{D}\delta\mathcal{F}][\mathcal{D}\delta\lambda][\mathcal{D}\delta\bar{\lambda}][\mathcal{D}\delta\phi^\dagger]\ \mathrm{e}^{-8\pi^2 k - \tilde{\mathcal{S}}^{\text{cl}} - \tilde{\mathcal{S}}}$$

si ottiene, in definitiva:

$$Z \simeq \int [\mathcal{D}\phi] \int_{\mathcal{M}_{N,k}} \mu(\mathcal{M}_{N,k}) \frac{\partial}{\partial\lambda}\ \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}} \tag{2.64}$$

L'efficacia di questa particolare suddivisione delle integrazioni sarà chiara non appena mostreremo in che modo la localizzazione interviene nel semplificare il calcolo.

Il passo successivo nel calcolo della funzione di partizione consiste nell'impiegare esplicitamente i dati ADHM. Questa sorta di traduzione della funzione di azione $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ dal linguaggio dei campi a quello delle matrici ADHM comporta lunghi ma notissimi calcoli. Noi non li ripercorreremo, vista l'abbondanza di letteratura sull'argomento (si veda, ad

esempio, [30][31][12]), limitandoci invece ad esibirne i risultati.
Le variabili ADHM in gioco in $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ sono gli usuali dati bosonici α_1, α_2, a, b e fermionici μ_1, μ_2, p, q, nonchè un dato φ, che rende conto del campo residuo ϕ. Un importante risultato riguardante il calcolo in questione consiste nella possibilità di eseguire esplicitamente l'integrazione su S^4 della densità lagrangiana avendo così l'azione $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ come esplicita funzione delle coordinate ADHM.
Le trasformazioni infinitesime di supersimmetria (scalare), a monte del processo di quozientamento rispetto ad $U(k) \times SU(N)$ si scrivono:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \rho\mu_1 & \delta\alpha_1^\dagger &= \rho\mu_1^\dagger \\
\delta\alpha_2 &= \rho\mu_2 & \delta\alpha_2^\dagger &= \rho\mu_2^\dagger \\
\delta a &= \rho p & \delta a^\dagger &= \rho p^\dagger \\
\delta b &= \rho q & \delta b^\dagger &= \rho q^\dagger \\
\delta\mu_1 &= \rho[\varphi, \alpha_1] & \delta\mu_1^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_1^\dagger] \\
\delta\mu_2 &= \rho[\varphi, \alpha_2] & \delta\mu_2^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_2^\dagger] \\
\delta p &= \rho\varphi a & \delta p^\dagger &= -\rho a^\dagger\varphi \\
\delta q &= -\rho b\varphi & \delta q^\dagger &= \rho\varphi b^\dagger \\
\delta\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Come già accennato in precedenza, l'azione $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ deve, per costruzione, essere invariante sotto l'azione naturale di $U(k) \times SU(N)$ sui dati ADHM. Questa osservazione, unitamente alla presenza della supersimmetria di cui sopra, permette di considerare una simmetria più generale della teoria che prevede anche l'azione infinitesima del gruppo $SU(N)$ attraverso un elemento $\varsigma \in \mathfrak{su}(N)$. Essa può essere scritta (vedi [11]), come:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \rho\mu_1 & \delta\alpha_1^\dagger &= \rho\mu_1^\dagger \\
\delta\alpha_2 &= \rho\mu_2 & \delta\alpha_2^\dagger &= \rho\mu_2^\dagger \\
\delta a &= \rho p & \delta a^\dagger &= \rho p^\dagger \\
\delta b &= \rho q & \delta b^\dagger &= \rho q^\dagger \\
\delta\mu_1 &= \rho[\varphi, \alpha_1] & \delta\mu_1^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_1^\dagger] \\
\delta\mu_2 &= \rho[\varphi, \alpha_2] & \delta\mu_2^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_2^\dagger] \\
\delta p &= \rho\varphi a - \rho a\varsigma & \delta p^\dagger &= -\rho a^\dagger\varphi + \rho\varsigma a^\dagger \\
\delta q &= -\rho b\varphi + \rho\varsigma b & \delta q^\dagger &= \rho\varphi b^\dagger - \rho b^\dagger\varsigma \\
\delta\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{2.66}$$

ed è un risultato fondamentale e notissimo (si veda, ad esempio, [30]) che, rispetto a tale supersimmetria scalare estesa (detta operatore BRST), l'azione è esatta, cioè può essere scritta come:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \delta\mathcal{R} \tag{2.67}$$

con $\mathcal{R}$ opportuna funzione dei dati ADHM bosonici e fermionici, nonchè del campo φ.

2.5.3 Localizzazione: $\mathcal{N} = 2$ SYM in termini di algebroidi di Lie

Veniamo finalmente all'applicazione dei metodi di localizzazione esposti nel capitolo 1. Preliminarmente, è necessario inserire i concetti caratteristici del calcolo della funzione di partizione nell'ambito naturale per la localizzazione, quello degli algebroidi di Lie.
L'integrazione sugli algebroidi di Lie, come l'integrazione bereziniana, permette di gestire la somma, oltre che su variabili commutanti, anche su variabili anticommutanti, pensate come sezioni dell'algebra esterna del duale di un algebroide A. Questo ci suggerisce subito di considerare, nel nostro caso, un algebroide che abbia come spazio base lo spazio dei moduli $\mathcal{M}_{N,k}$, cui appartengono le configurazioni bosoniche, e come fibra il nucleo dell'operatore di Dirac twistato D, cui appartengono le configurazioni fermioniche. Per quanto già osservato sull'interpretazione degli zero-modi fermionici come elementi dello spazio cotangente (complessificato) a $\mathcal{M}_{N,k}$, si vorrebbe porre $A = \mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k} \otimes \mathbb{C}$.
Tuttavia il processo di quoziente rispetto a $U(k) \times SU(N)$ che interviene nella definizione di $\mathcal{M}_{N,k}$ rende questa scelta poco operativa, a causa delle difficoltà nel trattare classi di equivalenza di matrici. Ciò che si sceglie di fare è piuttosto di operare l'integrazione a monte del quozientamento, anche se in tal modo si somma anche su configurazioni di campo gauge equivalenti. D'altra parte questa imprecisione si traduce soltanto nell'ottenere una costante moltiplicativa extra (il volume del gruppo) per il valore della funzione di partizione, che tuttavia mantiene il corretto andamento funzionale. In definitiva, posto $\mathcal{M}_{N,k} = \mathcal{V}_{N,k}/(U(k) \times SU(N))$ (e qui $\mathcal{V}_{N,k}$ indica quindi lo spazio delle matrici ADHM vincolate, a monte appunto del quozientamento), si sceglie:

$$A = \mathrm{T}\mathcal{V}_{N,k} \otimes \mathbb{C}$$

Come sappiamo, però, per definire completamente l'algebroide di Lie A, è necessario fissare l'ancora $\sigma \colon A \to \mathrm{T}\mathcal{V}_{N,k} \otimes \mathbb{C}$. Un modo naturale per fare ciò è indurre l'ancora dalla presenza di un differenziale δ sulle sezioni di $\wedge^{\bullet} A^*$, come già mostrato nel capitolo 1.
Ebbene, l'idea fondamentale dell'applicazione in esame consiste nel riguardare il generatore infinitesimo Q della supersimmetria (operatore BRST), come un differenziale equivariante $\delta_{\mathfrak{g}}$ sull'algebroide di Lie rispetto all'azione del gruppo $U(k) \times SU(N)$ su $\mathcal{V}_{N,k}$. Questo risulta particolarmente interessante, visto che l'azione $\mathcal{S}_{\text{eff}}$, equivariante,

appare allora equivariantemente esatta, e la sezione $\mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}}$, integranda nella funzione di partizione, equivariantemente chiusa. Si riguardi infine la misura di integrazione:

$$\mu(\mathcal{V}_{N,k})f\frac{\partial}{\partial\mu_1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}$$

(vedi la (2.64)) come sezione $X\otimes\mu$ di $\wedge^r A\otimes\Omega^m_{\mathcal{V}_{N,k}}$ (dove $r=\mathrm{rk}A$ e $m=\dim\mathcal{V}_{N,k}$) tale che $D(X\otimes\mu)=0$. Questa imposizione fissa il fattore f in maniera perfettamente naturale, rispetto ai cambi di coordinate fermioniche; nel nostro caso si tratta di un fattore $1/\sqrt{g}$, dove g è la metrica dello spazio dei moduli. In quest'ottica abbiamo:

$$\tilde{\delta}_{\mathfrak{g}}\left(\mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}}\otimes X\otimes\mu\right)=0$$

e si presenta allora la possibilità di applicare all'integrazione la formula di localizzazione (1.33).
Veniamo quindi alla determinazione dell'ancora. L'azione del differenziale equivariante sulle funzioni $f\in\Gamma(\wedge^0A^*)$ estrae la parte ordinaria (non equivariante) del differenziale stesso:

$$\delta_{\mathfrak{g}}f=\delta f$$

Nel nostro caso, dalle equazioni (2.66), e utilizzando d'ora in poi la notazione propria della coomologia equivariante degli algebroidi:

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1&=\mu_1 & \delta\alpha_1^\dagger&=\mu_1^\dagger\\ \delta\alpha_2&=\mu_2 & \delta\alpha_2^\dagger&=\mu_2^\dagger\\ \delta a&=p & \delta a^\dagger&=p^\dagger\\ \delta b&=q & \delta b^\dagger&=q^\dagger\end{aligned}\tag{2.68}$$

da cui, ricordando anche come sono stati definiti i dati ADHM fermionici, si deduce a vista che l'ancora è l'identità in $\mathrm{T}\mathcal{V}_{N,k}\otimes\mathbb{C}$ e che $\delta=\mathrm{d}$.

Identificato l'algebroide di Lie A, passiamo a considerare l'azione del gruppo $U(k)\times SU(N)$ rispetto a cui è costruito il differenziale equivariante. Sempre dall'analisi delle equazioni (2.66), e ricordando che, nel nostro caso, $\delta_{\mathfrak{g}}=\delta-i_{b(\xi)}=\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}=\mathrm{d}-i_{\xi^*}$ con $\xi\in\mathfrak{u}(k)\times\mathfrak{su}(N)$, si ottiene:

$$\xi=(\varphi,\varsigma)\ \in\mathfrak{u}(k)\times\mathfrak{su}(N)$$

e, per le componenti di ξ^*:

$$\begin{aligned}\langle\xi^*,\mu_1\rangle&=[\varphi,\alpha_1] & \langle\xi^*,\mu_1^\dagger\rangle&=[\varphi,\alpha_1^\dagger]\\ \langle\xi^*,\mu_2\rangle&=[\varphi,\alpha_2] & \langle\xi^*,\mu_2^\dagger\rangle&=[\varphi,\alpha_2^\dagger]\\ \langle\xi^*,p\rangle&=\varphi a-a\varsigma & \langle\xi^*,p^\dagger\rangle&=-a^\dagger\varphi+\varsigma a^\dagger\\ \langle\xi^*,q\rangle&=-b\varphi+\varsigma b & \langle\xi^*,q^\dagger\rangle&=\varphi b^\dagger-b^\dagger\varsigma\end{aligned}\tag{2.69}$$

Noi scegliamo $\varsigma = \mathrm{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N) \ \in \mathfrak{su}(N)$, e $\varphi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \ \in \mathfrak{u}(k)$.
Affinchè la formula di localizzazione sia operativa, ξ^* deve avere un numero finito di zeri isolati. In realtà abbiamo finora ignorato i vincoli ADHM. Essi intervengono proprio quando si cercano i punti fissi dell'azione infinitesima ξ^*. Infatti sappiamo che l'azione di $U(k)\times SU(N)$ preserva i vincoli ADHM, perciò ξ^* è tangente alla superficie $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{R}} = 0$ individuata dai vincoli stessi e integrare sulla sottovarietà $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{R}} = 0$ equivale a considerare soltanto gli zeri di ξ^* che giacciono su di essa.
I punti di localizzazione della funzione di partizione sono pertanto dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} [\varphi, \alpha_1] &= 0 \\ [\varphi, \alpha_2] &= 0 \\ \varphi a - a\varsigma &= 0 \\ -b\varphi + \varsigma b &= 0 \\ V^{\mathbb{R}} = V^{\mathbb{C}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Purtroppo però le soluzioni di tale sistema non sono isolate.
Quello che è possibile fare, per avere finalmente zeri isolati, è considerare non l'azione $\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}$, bensì una sua deformazione infinitesima tramite l'azione di un altro gruppo sui dati ADHM. Tale gruppo è il toro bidimensionale T^2 e l'azione di un suo elemento $g = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_2})$ sui dati ADHM, seguendo Nakajima [33], può essere scritta:

$$g.(\alpha_1, \alpha_2, a, b) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_1}\alpha_1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_2}\alpha_2, a, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon_2 + \mathrm{i}\epsilon_2} b) \tag{2.71}$$

Tale azione preserva i vincoli ADHM e l'azione efficace deformata tramite un elemento $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathfrak{t}^2$ è ancora equivariante e equivariantemente esatta rispetto al differenziale equivariante costruito tramite il campo generatore dell'azione appena esibita:

$$\begin{aligned} \langle \xi^*, \mu_1 \rangle &= [\varphi, \alpha_1] + \epsilon_1 \alpha_1 & \qquad \langle \xi^*, \mu_2 \rangle &= [\varphi, \alpha_2] + \epsilon_2 \alpha_2 \\ \langle \xi^*, p \rangle &= \varphi a - a\varsigma & \qquad \langle \xi^*, q \rangle &= -b\varphi + \varsigma b + (\epsilon_1 + \epsilon_2) b \end{aligned} \tag{2.72}$$

(più i termini hermitiani coniugati). I punti fissi di questa azione infinitesima che soddisfano i vincoli ADHM sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} [\varphi, \alpha_1] + \epsilon_1 \alpha_1 &= 0 \\ [\varphi, \alpha_2] + \epsilon_2 \alpha_2 &= 0 \\ \varphi a - a\varsigma &= 0 \\ -b\varphi + \varsigma b + (\epsilon_1 + \epsilon_2) b &= 0 \\ V^{\mathbb{R}} = V^{\mathbb{C}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

o, più esplicitamente:

$$\begin{aligned} (\varphi_i - \varphi_j + \epsilon_l)(\alpha_l)_{ij} &= 0 \\ (\varphi_i - \varsigma_\lambda) a_{i\lambda} &= 0 \\ (-\varphi_i + \varsigma_\lambda + \epsilon_1 + \epsilon_2) b_{\lambda i} &= 0 \\ V^{\mathbb{R}} = V^{\mathbb{C}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.74}$$

con $i, j = 1, \ldots, k$, $\lambda = 1, \ldots, N$ e $l = 1, 2$. Le soluzioni sono in effetti isolate e in numero finito. La teoria localizza e la formula di localizzazione permette il calcolo esplicito della funzione di partizione dell'azione deformata $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ (in realtà esiste anche una dipendenza di Z da ς a causa della rottura della simmetria di gauge dovuta ad un termine $\frac{1}{2}[\phi, \phi^\dagger]^2$ nella lagrangiana). Tale calcolo comprende un certo numero di passaggi tecnici, tra cui la valutazione dello Pfaffiano che compare nella formula di localizzazione (1.33), ma può essere portato a termine in maniera esatta, come mostrato in [12].

2.6 La mancata localizzazione di $\mathcal{N} = 1$ SYM

La teoria $\mathcal{N} = 1$ che analizzeremo è del tipo twistato di cui abbiamo parlato al paragrafo 2.4.5, perciò si ambienta in uno spazio-tempo con struttura di Kähler.
Questo implica che, considerando soluzioni istantoniche, lo spazio dei moduli bosonici e fermionici resta, come in $\mathcal{N} = 2$, lo spazio $\mathrm{T}\mathcal{M}_{N,k} \otimes \mathbb{C}$. Tuttavia cambia la forma dell'operatore BRST considerato. La traduzione nel formalismo ADHM dell'azione di Q_1 è infatti della forma:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \rho\mu_1 & \delta\alpha_1^\dagger &= 0 \\ \delta\alpha_2 &= \rho\mu_2 & \delta\alpha_2^\dagger &= 0 \\ \delta a &= \rho p & \delta a^\dagger &= 0 \\ \delta b &= \rho q & \delta b^\dagger &= 0 \\ \delta\mu_1 &= 0 & \delta\mu_1^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_1^\dagger] \\ \delta\mu_2 &= 0 & \delta\mu_2^\dagger &= \rho[\varphi, \alpha_2^\dagger] \\ \delta p &= 0 & \delta p^\dagger &= -\rho a^\dagger \varphi + \rho\varsigma a^\dagger \\ \delta q &= 0 & \delta q^\dagger &= \rho\varphi b^\dagger - \rho b^\dagger \varsigma \\ \delta\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Ripercorrendo il procedimento già utilizzato nel caso $\mathcal{N} = 2$, procediamo all'identificazione dell'algebroide di Lie in gioco. Il fibrato A, come detto, consiste in $\mathrm{T}\mathcal{V}_{N,k} \otimes \mathbb{C}$

(dove, ancora una volta, $\mathcal{V}_{N,k} = \mathcal{M}_{N,k}/(U(k) \times SU(N))$ e si è preferito lavorare a monte del quozientamento rispetto all'azione di $U(k) \times SU(N)$, con le usuali precisazioni). Dall'azione delle trasformazioni infinitesime di supersimmetria (2.75) (operatore BRST) ricaviamo la forma del differenziale equivariante dell'algebroide e, da esso, l'ancora. Si ha, in notazione propria della coomologia equivariante degli algebroidi di Lie:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \rho\mu_1 & \delta\alpha_1^\dagger &= 0 \\ \delta\alpha_2 &= \rho\mu_2 & \delta\alpha_2^\dagger &= 0 \\ \delta a &= \rho p & \delta a^\dagger &= 0 \\ \delta b &= \rho q & \delta b^\dagger &= 0 \end{aligned} \tag{2.76}$$

da cui si ha che l'ancora è la proiezione $\sigma\colon \mathrm{T}\mathcal{V}_{N,k} \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{T}^{1,0}\mathcal{V}_{N,k}$ del fibrato tangente sui vettori di tipo $(1,0)$ e il differenziale dell'algebroide è l'operatore di Dolbeault ∂. Per quanto riguarda il morfismo di algebre di Lie $b\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(A)$, esso si ricava, come sempre, dalla parte equivariante del differenziale BRST, ottenendo:

$$\begin{aligned} \langle b(\xi), \mu_1 \rangle &= 0 & \langle b(\xi), \mu_1^\dagger \rangle &= [\varphi, \alpha_1^\dagger] \\ \langle b(\xi), \mu_2 \rangle &= 0 & \langle b(\xi), \mu_2^\dagger \rangle &= [\varphi, \alpha_2^\dagger] \\ \langle b(\xi), p \rangle &= 0 & \langle b(\xi), p^\dagger \rangle &= -\rho a^\dagger \varphi + \rho\varsigma a^\dagger \\ \langle b(\xi), q \rangle &= 0 & \langle b(\xi), q^\dagger \rangle &= \rho\varphi b^\dagger - \rho b^\dagger \varsigma \end{aligned} \tag{2.77}$$

da cui, data la forma dell'ancora (proiezione sui vettori di tipo $(1,0)$) e considerato il diagramma commutativo (1.14), si ottiene che il campo vettoriale fondamentale, generatore dell'azione del gruppo $U(k) \times SU(N)$ su $\mathcal{V}_{N,k}$, è interamente nullo:

$$\begin{aligned} \langle \xi^*, \mu_1 \rangle &= 0 & \langle \xi^*, \mu_1^\dagger \rangle &= 0 \\ \langle \xi^*, \mu_2 \rangle &= 0 & \langle \xi^*, \mu_2^\dagger \rangle &= 0 \\ \langle \xi^*, p \rangle &= 0 & \langle \xi^*, p^\dagger \rangle &= 0 \\ \langle \xi^*, q \rangle &= 0 & \langle \xi^*, q^\dagger \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Tale azione banale, naturalmente, non permette la localizzazione, nemmeno qualora fosse possibile estendere al caso $\mathcal{N}=1$ in esame l'azione del toro T^2 considerata nel paragrafo precedente. Benchè il fatto di non poter estendere il procedimento adottato altrove non costituisca certo una prova del fatto che la teoria in questione non localizzi, c'è una osservazione, che viene ancora dal nostro teorema (1.5.5), che suggerisce fortemente che tale localizzazione non debba avvenire in un insieme di punti isolati. Infatti si ricordi che, nel caso in cui il rango del morfismo ancora σ sia minore della dimensione della varietà base M, nelle ipotesi di applicabilità della formula, essa dà 0 come risultato. Giacchè nel nostro caso l'immagine im $\sigma = \mathrm{T}^{1,0}\mathcal{V}_{N,k}$ è solo "metà" del fibrato tangente, ci troveremmo proprio in queste condizioni. Una funzione di partizione deformata identicamente nulla sarebbe in contrasto con valutazioni eseguite con altri metodi.

Conclusioni e futuri sviluppi

Ripetiamo, brevemente, un'ultima volta, la struttura logica che soggiace a questo lavoro. Nel capitolo 1 viene introdotto un ambiente matematico, l'algebroide di Lie, che supporta una generalizzazione dei concetti di coomologia, coomologia equivariante e integrazione. In particolare permette di trattare con rigore l'idea di integrazione su variabili sia ordinarie che anti-commutanti. In quest'ambito dimostriamo un risultato originale che consiste in una formula di localizzazione capace di ricondurre, al presentarsi di opportune condizioni, tali integrali "generalizzati" a più semplici somme finite di opportuni addendi. Nel capitolo 2 tale risultato viene sfruttato per l'esecuzione di un calcolo di interesse fisico, la valutazione della funzione di partizione delle teorie di gauge supersimmetriche (non abeliane). E' principalmente a quest'applicazione che si riferiscono le seguenti conclusioni.

Il calcolo della funzione di partizione di una teoria di gauge supersimmetrica (SYM) può essere effettuato, nell'approssimazione semiclassica, per mezzo del calcolo istantonico. Gli istantoni sono una particolare classe di soluzioni delle equazioni del moto per il bosone di gauge e per i suoi partner fermionici e, come tali, minimizzano l'azione della teoria. Una volta liberatisi degli altri campi in gioco, effettuando con qualche tecnica appropriata l'integrazione funzionale che interviene nel calcolo della funzione di partizione, considerare le soluzioni istantoniche per i campi di gauge bosonici e fermionici permette di ridurre l'integrazione funzionale residua ad una integrazione su un algebroide di Lie (con variabili sia commutanti che anti-commutanti). Tale "spazio di integrazione" è appunto lo spazio delle configurazioni istantoniche non gauge-equivalenti, cioè lo spazio dei moduli bosonici e fermionici.

Grazie alla formula di localizzazione introdotta nel capitolo 1, noi siamo in grado di ridurre un'integrazione su algebroidi di Lie ad una somma finita, qualora siano soddisfatte opportune ipotesi. Sorge perciò l'interesse di verificare se la quantità da noi integrata, l'esponenziale dell'azione con l'opportuna misura di integrazione, soddisfi queste ipotesi.

Le teorie di gauge supersimmetriche, grazie alla supersimmetria stessa, che le caratterizza, offrono spontaneamente un'azione che gode di parte delle caratteristiche necessarie alla localizzazione. In particolare essa è una forma differenziale, in un senso generale, chiusa rispetto alla coomologia equivariante definita dall'operatore BRST. Resta da verificare che tale azione sia anche equivariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni la cui azione sullo spazio dei moduli bosonici abbia punti fissi isolati.

Laddove per la teoria di Yang-Mills con due supersimmetrie ($\mathcal{N} = 2$ SYM) è possibile trovare un gruppo di trasformazioni con punti fissi isolati, cioè il gruppo T^2, non è evidente che nel caso di una sola supersimmetria ($\mathcal{N} = 1$ SYM) un simile gruppo esista. Certamente il gruppo T^2 non riesce ad essere adattato a questo caso. Naturalmente questo non significa che abbiamo mostrato che $\mathcal{N} = 1$ SYM non localizza, ma abbiamo certamente indicato un suggerimento in tal senso.

Inoltre l'importanza del nostro approccio sta nel fatto che esso è estremamente generale. I metodi di localizzazione, intesi in termini di integrazione su algebroidi di Lie, possono essere tentati con una classe molto vasta di teorie. Sostanzialmente tutte quelle che presentano un operatore BRST, nel senso di un operatore che definisca una coomologia equivariante rispetto all'azione di un qualche gruppo. Trovare un gruppo che localizzi è la condizione sufficiente all'applicazione della formula. La formulazione in termini di algebroidi di Lie, in particolare, rende immediata la verifica della presenza delle condizioni minime.

E' in questo senso che appare più naturale cercare ulteriori sviluppi. Ad esempio sarebbe quanto meno istruttivo riformulare in termini di algebroidi il calcolo della localizzazione di $\mathcal{N} = 4$ SYM, già abbozzato nel linguaggio delle supervarietà in [12]. L'aggiunta di multipletti di materia alle lagrangiane supersimmetriche citate sarebbe poi il passo successivo.

Infine è recentemente stata portata all'attenzione del relatore e dell'autore di questa tesi una situazione in cui, di nuovo, la formula di localizzazione dovrebbe portare risultati espliciti. Si tratta del calcolo istantonico nell'ambito dello studio dei cosiddetti *vortici*, particolari configurazioni classiche in teorie di campo $(2 + 1)$-dimensionali che portano informazioni sulla dinamica, nel limite di forte accoppiamento, delle teorie di gauge 4-dimensionali ad esse associate. Come mostrato in [23], lo spazio dei moduli dei vortici di opportune teorie può essere identificato con una sottovarietà lagrangiana speciale dello spazio dei moduli istantonici di $\mathcal{N} = 2$ SYM. In particolare, tale sottovarietà è costituita dall'insieme dei punti fissi di un'azione del gruppo $U(1) \subset T^2$ su $\mathcal{M}_{N,k}$ indotta dalle rotazioni degli istantoni su un piano di $\mathbb{R}^4$. Dalle nostre prime analisi appare che tale sottovarietà erediti, dallo spazio dei moduli in cui è immersa, tutte le caratteristiche necessarie perchè su di essa si presenti localizzazione.

Torniamo infine, per un istante, sui risultati matematici di questa tesi. Abbiamo già detto di come la formula di localizzazione per la coomologia equivariante degli algebroidi di Lie, principale risultato del capitolo 1, presenti una generalità sufficiente a garantirne numerose applicazioni. Oltre alle teorie di campo supersimmetriche, pare di trovare nella teoria dei sistemi integrabili un possibile ulteriore campo di utilizzo. Infatti, dagli esempi mostrati nel capitolo 1, appare chiaro come la localizzazione possa intervenire nell'ambito dell'integrazione su varietà simplettiche o di Poisson, ambiente geometrico ideale per la suddetta teoria fisica.

Infine, per quanto riguarda ambiti più strettamente matematici, risulterebbe interessante l'impiego della formula di localizzazione per lo studio della coomologia di particolari spazi. Un esempio tra tutti è dato dal caso degli algebroidi di Atiyah (per cui si veda il relativo esempio nel capitolo 1), importanti poichè costituiscono, in qualche senso, un prototipo per il più generale algebroide di Lie.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, *The geometry of Yang-Mills fields*, Lez. Ferm. Acc. Naz. dei Lin. Sc. Norm. Sup. Pisa (1979).

[2] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfel'd & Y. I. Manin, *Construction of instantons*, Phys. Lett. A, 65 (1978) 185-187.

[3] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin & I.M. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*, Proc. R. Soc. Lond. A. 362, 425-461 (1978)

[4] A.A. Belavin, A.M. Polykov, A.S. Schwartz & Y.S. Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations*, Phys. Lett., vol. 59B, n.1 (1975)

[5] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini & G. Travaglini, *Multi-instantons, supersymmetry and topological field theories*, Phys. Lett., B480 (2000) 365-372.

[6] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini & G. Travaglini, *Instanton calculus, topological field theories and N=2 super Yang-Mills theories*, J. High Energy Phys., 07 (2000) 017.

[7] F.A. Berezin & D.A. Leĭtes, *Supermanifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 224 (1975) 505-508.

[8] N. Berline, E. Getzler & M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 298, Springer- Verlag, Berlin, 1992.

[9] B. Booss and DD Bleecker, *Topology and analysis: the Atiyah-Singer formula and gauge-theoretic physics*, Springer Verlag 1985.

[10] C. Bartocci, U. Bruzzo & D. Hernández Ruipérez, *The geometry of supermanifolds*, Kluwer (1991).

[11] U. Bruzzo & F. Fucito, *Superlocalization formulas and supersymmetric Yang-Mills theories*, math-ph/0310036.

[12] U. Bruzzo, F. Fucito, J.F. Morales & A. Tanzini, *Multi-Instanton Calculus and Equivariant Cohomology*, J. High Energy Phys. 05 (2003) 054.

[13] U. Bruzzo, F. Fucito, A. Tanzini & G. Travaglini, *On the multi-instanton measure for super Yang-Mills theories*, Nucl. Phys., B611 (2001) 205-226.

[14] A. Cannas da Silva & A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, 10. American Mathematical Society, 1999 55.

[15] S.K. Donaldson, *Instantons and Geometric Invariant Theory*, Commun. Math. Phys. 93, 453-460 (1984).

[16] N. Dorey, V. V. Khoze & M. P. Mattis, *Multi-instanton calculus in N=2 supersymmetric gauge theory*, Phys. Rev., D54 (1996) 2921-2943.

[17] N. Dorey, V. V. Khoze & M. P. Mattis, *Multi-instanton calculus in N=2 supersymmetric gauge theory. II: Coupling to matter*, Phys. Rev., D54 (1996) 832-848.

[18] N. Dorey, T.J. Hollowood, V.V. Khoze & M.P. Mattis, *The calculus of many instantons*, Phys. Rept., 371 (2002) 231-459.

[19] S. Evens, J.-H. Lu & A. Weinstein, *Transvers measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50 (1999), no. 200, 417-436; dg-ga/9610008.

[20] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, hep-th/0208176.

[21] F. Fucito & G. Travaglini, *Instanton calculus and nonperturbative relations in N=2 supersymmetric gauge theories*, Phys. Rev., D55 (1997) 1099-1104.

[22] V. L. Ginzburg, *Equivariant Poisson cohomology and a spectral sequence associated with a moment map*, Internat. J. Math. 10 (1999), no. 8, 977-1010.

[23] A. Hanany & D. Tong, *Vortices, Instantons and Branes*, hep-th/0306150.

[24] D. Hernández Ruipérez & J. Muñoz Masqué, *Construction intrinsèque du faisceau de Berezin d'une variété graduée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 301 (1985) 915-918.

[25] T. J. Hollowood, *Calculating the prepotential by localization on the moduli space of instantons*, J. High Energy Phys., 03 (2002) 038-061.

[26] T. J. Hollowood, *Testing Seiberg-Witten theory to all orders in the instanton expansion*, Nucl. Phys., B639 (2002) 66-94.

[27] B. Kostant, *Graded manifolds, graded Lie thory, and prequantization*, Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos. Univ. Bonn, Bonn, 1975), pp. 177-306. Lecture Notes in Math. 570. Springer, Berlin, 1977.

[28] A. Losev, N. Nekrasov & S. L. Shatashvili, *Issues in topological gauge theory*, Nucl. Phys. B, 534 (1998) 549-611.

[29] A. Maciocia, *Metrics on the Moduli Space of Instantons Over Euclidean* 4*-Space*, Commun. Math. Phys. 135, 467-482 (1991).

[30] G.W. Moore, N. Nekrasov & S. Shatashvili, *D-particle bound states and generalized instantons*, Commun. Math. Phys., 209 (2000) 77-95.

[31] G.W. Moore, N. Nekrasov & S. Shatashvili, *Integrating over Higgs branches*, Commun. Math. Phys., 209 (2000) 97-121.

[32] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and NY (1991).

[33] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series 18. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[34] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), pp. 477-495, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[35] J. Roe, *Elliptic Operators, topology and asymptotic methods*, Harlow, Essex, England : New York: Longman Scientific & Technical ; Wiley, 1988.

[36] N. Seiberg & E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B, B426 (1994) 19-52.

[37] N. Seiberg & E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. B, 431 (1994) 484-550.

[38] J. Wess & J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1992).

[39] P. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity*, World Scientific (1990)

[40] E. Witten, *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold*, J. Math. Phys., 35 (1994) 5101-5135.

[41] E. Witten, *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys., 117 (1988) 353-386.